

GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

MASTER I

J.SAAB

ISSAE-CNAM LIBAN, UNIVERSITÉ LIBANAISE
E-mail address: jihadsaab@isae.edu.lb
URL: [http ://www.puissancemaths.com](http://www.puissancemaths.com)

RÉSUMÉ.

Table des matières

Introduction	v
Chapitre 1. Sous Variétés de \mathbb{R}^n	1
1. Théorème du rang	1
2. Sous variétés de \mathbb{R}^{n+p}	4
3. Espace tangent à une sous variété	5
4. Changement de coordonnées et espace tangent.	10
5. Exercices	12
Chapitre 2. Variété différentielle	15
1. Introduction	15
2. Atlas	15
3. Atlas maximal-Variétés différentielles	18
4. Fonctions différentiables	19
5. Topologie sur une variété	21
6. Germes	23
7. Exercices	25
Chapitre 3. Espace tangent	29
1. Rappel, cas où la variété est \mathbb{R}^n	29
2. Cas d'une variété abstraite	31
3. Variété tangente	34
4. Champs de vecteurs	37
5. Application tangente	42
6. Exercices	44
Chapitre 4. Linéarisation des champs de vecteurs	47
1. Introduction	47
2. Problème de Cauchy, flot, groupe à un paramètre	47
3. Théorème de redressement d'un champ de vecteurs	51
4. Exercices	54
Chapitre 5. Connexions linéaires sur les variétés	55
1. Introduction	55
2. Connexions linéaires	57

3. Expressions en coordonnées locales	59
4. Interprétation géométrique	59
5. Torsion et Courbure	63
6. Courbure et Transport Parallèle	65
7. Exercices	67
Chapitre 6. Variétés Riemanniennes	69
1. Métrique Riemannienne	69
2. Calculs en coordonnées locales	70
3. Interprétation géométrique	72
4. Tenseur de courbure sur une Variété Riemannienne	75
Chapitre 7. Géodésiques d'une variété Riemannienne	79
1. Définitions - Existence locale	79
2. Exemples de Géodésiques	81
Bibliographie	87

Introduction

Ce cours s'adresse aux étudiants ayant suivi le cours de la géométrie des courbes et des surfaces, ainsi que le cours du calcul différentiel. On introduit la notion de variétés qui d'un côté généralise celle des surfaces et d'un autre côté permet d'élargir le calcul différentiel sur des objets mathématiques qui ne sont pas nécessairement des ouverts dans un espace de Banach. Ce travail est consacré à l'étude de variétés Riemanniennes et plus précisément, à l'étude de la métrique Riemannienne sur une variété qui permet d'introduire les notions de géodésiques.

En effet, après avoir introduit les sous variétés de \mathbb{R}^n , les variétés, les espaces tangents et le module des champs de vecteurs, on est en mesure d'introduire les connexions sur les variétés dans le but d'introduire la notion de transport parallèle. [1],[2]. La connexion sur une variété a été introduite sous la forme intrinsèque par Levi-Civita(1873-1941). Il s'agit de donner un sens à la dérivation d'un champ de vecteurs dans la direction d'un autre champ de vecteurs.

Etant donnée une connexion ∇ sur une variété M , un champ X le long d'une courbe γ de M est dit parallèle si $\nabla_{\gamma'(t)}X = 0$, ceci est équivalent, dans le cas canonique de \mathbb{R}^n , à dire que X est un champ constant.

En établissant un dictionnaire entre les champs de vecteurs et les systèmes d'équations différentielles autonomes, on montre un très joli théorème qui affirme l'existence d'un champ parallèle qui prolonge tout vecteur initial le long d'une courbe[7]. Cette notion est généralisée localement sur les variétés. On introduit la notion de champs parallèles, ce sont les champs parallèles à toute courbe, X est parallèle si et seulement si $\nabla_Y X = 0, \forall X \in \chi(M)$ où $\chi(M)$ désigne le $C^\infty(M)$ -module de champs de vecteurs sur M . [1], [2], [7]; On montre un théorème d'une grande importance qui affirme l'équivalence entre l'existence locale d'un champ parallèle et le fait que la courbure de la connexion $R = 0$, c'est à dire la connexion est plate. Intuitivement, cela voudrait dire que si X est parallèle sur U , une carte de M , alors U "ressemble" à \mathbb{R}^n .

Dans la deuxième partie de ce cours, on introduit la notion de produit scalaire sur la variété, il s'agit d'un champ de vecteurs symétrique défini positif sur M

$$\begin{aligned} g : M &\longrightarrow \odot_2^0 M \\ p &\longrightarrow g_p : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

où g_p est un produit scalaire sur $T_p M$.

On montre le lemme fondamental de la géométrie Riemannienne [7],[4],[5],[6], qui associe à toute métrique une connexion linéaire ∇ à torsion nulle et qui est compatible avec g , $\nabla_g = 0$. On montre le théorème de compatibilité qui assure que le produit scalaire est invariant par transport parallèle le long de toute courbe lisse sur une variété. On introduit aussi la grande notion de géodésiques, il s'agit des courbes dont le vecteur vitesse est parallèle, ceci rappelle la notion des droites de \mathbb{R}^n . Si deux points se trouvent sur une même géodésique alors la distance la plus courte entre eux est la longueur de cette géodésique entre eux. C'est pourquoi on les appelle les courbes minimales. Des exemples concrets ont été introduits où on a montré que les géodésiques d'une sphère sont les cercles de rayon maximal. Pour un exposé complet sur ce sujet, on pourrait consulter[5],[6].

Une dernière notion aussi importante que la notion de géodésique est la courbure sectionnelle,[5],[6], liée à la notion de formes fondamentales. D'un joli exemple, on montre que la courbure sectionnelle d'une sphère est égale à 1. Notons qu'une branche à part entière de la géométrie Riemannienne, est la caractérisation de variétés à courbure sectionnelle constante.

CHAPITRE 1

Sous Variétés de \mathbb{R}^n

On a appris à faire de calculs différentiels sur des ouverts d'un espace vectoriel normé (en fait sur les ouverts de \mathbb{R}^n), la géométrie différentielle consiste essentiellement à étendre le calcul différentiel et géométrique à des sous ensembles de \mathbb{R}^n que l'on appelle "Sous Variétés".

1. Théorème du rang

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et V un ouvert de \mathbb{R}^p . On dit qu'une application $f : U \rightarrow V$ est différentiable en $x_0 \in U$ s'il existe une application linéaire $(Df)_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ telle que

$$\lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \vec{h}) - f(x_0) - (Df)_{x_0}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$$

c'est à dire

$$f(x_0 + \vec{h}) - f(x_0) = (Df)_{x_0}(\vec{h}) + \sigma(\|\vec{h}\|)$$

où $\sigma(\|\vec{h}\|) \rightarrow 0$ lors que $\|\vec{h}\| \rightarrow 0$.

On montre que si $(Df)_{x_0}$ existe, elle est unique et donnée par

$$(Df)_{x_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f^p}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x_0}$$

où $\frac{\partial f^i}{\partial x_j} \Big|_{x_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f^i(x_0^1, \dots, x_0^j + t, \dots, x_0^n) - f^i(x_0^1, \dots, x_0^n)}{t}$ est la dérivée

partielle de la fonction réelle $f^i(x)$ par rapport à la $j^{\text{ième}}$ variable, en x_0 . $(Df)_{x_0}$ est dite la différentielle de f en x_0 et la matrice qui représente $(Df)_{x_0}$

est dite "la matrice Jacobienne de f en x_0 ."

EXEMPLE 1.1. *La fonction*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longrightarrow (x - z, x \cos y, x + ze^y) \end{aligned}$$

est différentiable en 0 et sa différentielle en 0 est

$$(Df)_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \cos y & -x \sin y & 0 \\ 1 & ze^y & e^y \end{pmatrix}_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

REMARQUE 1.1. $D(f \circ g)_{x_0} = (Df)_{g(x_0)} \times (Dg)_{x_0}$

DÉFINITION 1.1. On dit que $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^p$ est de classe C^k en x_0 , si toutes les dérivées partielles existent et sont continues en x_0 jusqu'à l'ordre k . On dit que f est C^k sur U si elle est C^k en tout point de U et dans ce cas :

$$\frac{\partial^h f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_h}} \text{ pour } h \leq k$$

sont symétriques.

REMARQUE 1.2. Si f est C^1 alors f est différentiable.

DÉFINITION 1.2. Une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ est dite C^k -difféomorphisme si f est bijective et f et f^{-1} sont C^k .

EXEMPLE 1.2. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longrightarrow (u = x + y, v = x - e^z, w = y) \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{cases} x = u - w \\ y = w \\ z = \ln(u - v - w) \end{cases}$$

Soit $V = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u - v - w > 0\}$, il est clair que $f : U \rightarrow V$ est un C^∞ -difféomorphisme.

THÉORÈME 1.1 (d'inversion locale). Soient U, V deux ouverts de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow V$ de classe $C^k, k \geq 1$. On suppose qu'il existe $x_0 \in U$ tel que $\det(Df)_{x_0} \neq 0$, il existe alors un ouvert $U' \subset U$ contenant x_0 telle que $f|_{U'}$ est un C^k -difféomorphisme de $U' \rightarrow f(U')$

REMARQUE 1.3. Le théorème affirme que si $(Df)_{x_0}$ est bijective alors f est bijective sur un voisinage de x_0 .

DÉFINITION 1.3. On appelle C^k -système de coordonnées au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tout couple (ψ, U) avec U est un ouvert de \mathbb{R}^n contenant x_0 et ψ est un C^k -difféomorphisme de U sur un ouvert de \mathbb{R}^n .

REMARQUE 1.4. D'après le théorème d'inversion locale, pour qu'une application $C^k, \psi : U \rightarrow V$ définisse un système de coordonnées au voisinage de x_0 , il faut et il suffit que $\det(D\psi)_{x_0} \neq 0$

DÉFINITION 1.4. On dit que $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{n+p}$ est une immersion en $x_0 \in U$ si $(Df)_{x_0}$ est injective.

On dit que $f : U \subset \mathbb{R}^{n+p} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^p$ est une submersion en $x_0 \in U$ si $(Df)_{x_0}$ est surjective.

REMARQUE 1.5. Si f est une immersion ou une submersion en un point x_0 alors elle le restera dans un voisinage suffisamment petit de x_0 . (Cela vient du fait que le rang d'une matrice est une fonction continue)

REMARQUE 1.6. (1) Une application différentiable $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^{n+p}$ est une immersion si la matrice jacobienne de f est de rang n en tout point de U

(2) Une application différentiable $f : U \subset \mathbb{R}^{n+p} \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^p$ est une submersion si la matrice jacobienne de f est de rang p en tout point de U

DÉFINITION 1.5. Une immersion $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^{n+p}$ telle que $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow f(U)$ est un homéomorphisme, est dite un plongement

THÉORÈME 1.2 (du rang (Description locales des immersions et des submersions)).

(1) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^{n+p}$ une C^k -immersion en $x_0 \in U$ ($p \geq 0$), il existe alors un système de coordonnées locales au voisinage de $f(x_0)$ (c'est à dire un couple (y, V') où $V' \subset V$ est un voisinage de $f(x_0)$ et y est un C^k -difféomorphisme) et il existe un voisinage U' de x_0 tel que $f(U') \subset V'$ et tel que $y \circ f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0 \dots 0)$. (En d'autres termes, une immersion est localement l'injection canonique).

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{f} & V' \\ & \searrow & \downarrow y \\ & & \mathbb{R}^{n+p} \end{array}$$

(2) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^{n+p} \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^p$ une C^k -submersion en $x_0 \in U$, il existe alors un système de coordonnées locales autour de x_0 (c'est à dire un voisinage $U' \subset U$ de x_0 et un C^k -difféomorphisme x de U' dans un ouvert de \mathbb{R}^{n+p}) telle que

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^p \\ x \downarrow & \nearrow & \\ x(U') & & \end{array}$$

$f \circ x^{-1} : x(U') \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est donnée par $f \circ x^{-1}(x_1, \dots, x_{n+p}) = (x_{n+1}, \dots, x_{n+p})$ c'est à dire, une submersion est localement la deuxième projection.

REMARQUE 1.7. Toute immersion est localement un plongement, c'est à dire si $j : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^{n+p}$ est une immersion en x_0 , il existe un ouvert $U' \subset U, x_0 \in U'$ telle que $j|_{U'}$ soit un plongement,

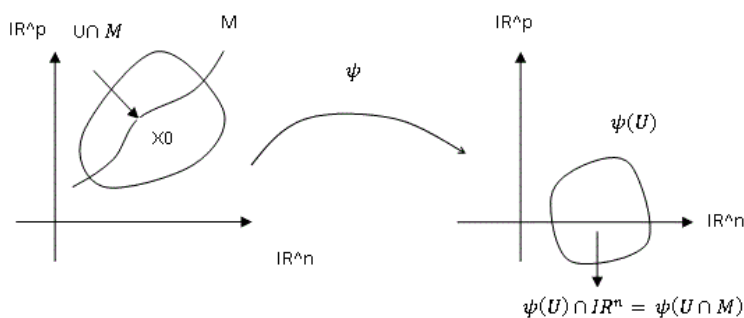
En effet, modulo un changement de coordonnées, toute immersion s'écrit

$$\begin{array}{ccc} j : U' \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+p} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longrightarrow & (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \end{array}$$

qui est un plongement.

2. Sous variétés de \mathbb{R}^{n+p}

Soit M une partie de \mathbb{R}^{n+p} . On dit que M est une sous variété de dimension n de \mathbb{R}^{n+p} , de classe C^k si : pour tout $x_0 \in M$, il existe un système de coordonnées locales (ψ, U) autour de x_0 tel que $\psi(U \cap M) = \psi(U) \cap \mathbb{R}^n = \{x \in \psi(U) \mid x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = x_{n+p} = 0\}$



Le théorème suivant donne les différentes manières de décrire localement une sous variété de \mathbb{R}^n .

THÉORÈME 2.1. *Soit $M \subset \mathbb{R}^{n+p}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) M est une sous variété de \mathbb{R}^{n+p} de dimension n et de classe C^k , $k \geq 1$
- (2) pour tout $m_0 \in M$, il existe un ouvert U de \mathbb{R}^{n+p} contenant m_0 et il existe une C^k -submersion, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ tel que

$$M \cap U = f^{-1}\{0\} = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$$

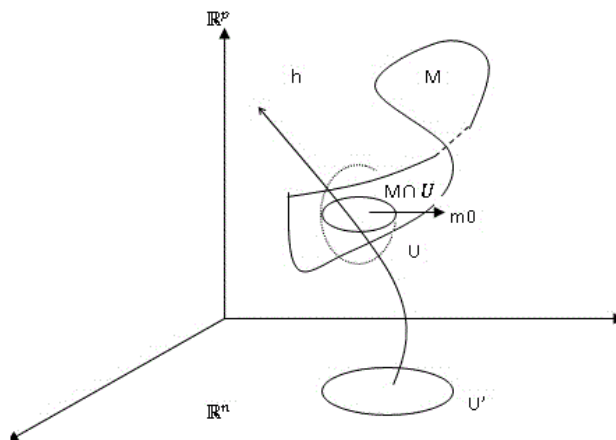
- (3) pour tout $m_0 = (x_0^1, \dots, x_0^{n+p}) \in M$, il existe un voisinage ouvert U de \mathbb{R}^{n+p} contenant m_0 et il existe un ouvert U' de \mathbb{R}^n contenant

(x_0^1, \dots, x_0^n) et une application de classe C^k

$$h : U' \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (h^1(x), \dots, h^p(x))$$

telle que $M \cap U = G_h = \{(x, h(x)) / x \in U'\}$



- (4) pour tout $m_0 \in M$ il existe un ouvert U de \mathbb{R}^{n+p} contenant m_0 et un ouvert Ω de \mathbb{R}^n contenant 0 et un C^k -plongement

$$j : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow U \cap M \subset \mathbb{R}^{n+p}$$

$$t = (t_1, \dots, t_n) \longrightarrow (x_1(t), \dots, x_{n+p}(t))$$

où $j(0) = m_0$

REMARQUE 2.1. Si $n = 1, n + p = 2$ ou 3 alors la notion de sous variétés généralise celle de courbes dans le plan ou dans l'espace. On trouve le point de vue du graphe $M \cap U = \{(x, f(x))\}$ (3 ième propriété) et de paramétrisation (4 ième propriété) $M \cap U : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ et l'équation cartésienne (2 ième propriété) $M \cap U : f(x, y) = 0$.

3. Espace tangent à une sous variété

3.1. Rappel sur les espaces affines. Si l'on veut avoir un support géométrique de la notion d'espace vectoriel, on peut penser à l'ensemble des "vecteurs libres" issus de l'origine, la somme se fait selon la règle du

parallélogramme et le produit par un scalaire n'est qu'une homothétie. En revanche, on ne somme pas de vecteurs issus de points différents. La notion d'espace affine permet de considérer "les vecteurs issus de points différents".

DÉFINITION 3.1. Soit E un espace vectoriel et $a \in E$, supposé être différent de 0. On appelle translation de vecteur directeur a , l'application

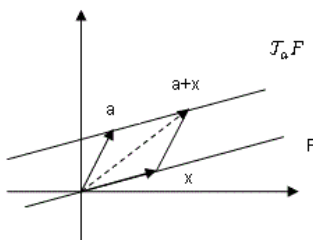
$$\begin{aligned} \mathcal{T}_a : E &\longrightarrow E \\ x &\longrightarrow x + a \end{aligned}$$

REMARQUE 3.1. $\mathcal{T}_a(0) \neq 0$ donc cette application n'est pas linéaire.

Si F est un sous espace vectoriel de E , on note par

$$\mathcal{T}_a(F) = \{y = a + x \in E \mid x \in F\}$$

le translaté de F selon le vecteur a . L'espace $\mathcal{T}_a(F)$ n'est pas un sous espace vectoriel sauf si $a \in F$. Le translaté de F est dit aussi "sous espace affine de E d'origine a et de direction F "



On peut imaginer les sous espaces vectoriels comme des droites ou des plans passant par l'origine, alors que les sous espaces affines sont des droites ou des plans translatés des sous espaces vectoriels.

On a dit que $\mathcal{T}_a(F)$ n'est pas un sous espace vectoriel de E , cependant, on peut lui introduire d'autres lois qui les rendent un espace vectoriel : On sait que pour tous $v, w \in \mathcal{T}_a(F)$ il existe $x, y \in F$ tels que $v = a + x$, $w = a + y$.

On introduit sur $\mathcal{T}_a(F)$ les lois suivantes :

$$\begin{cases} v \dot{+} w &= \mathcal{T}_a(x+y) = a + (x+y) \\ \lambda v &= \mathcal{T}_a(\lambda x) = a + (\lambda x) \end{cases}$$

Pour les notations : $v = x_a = \mathcal{T}_a(x)$, on a

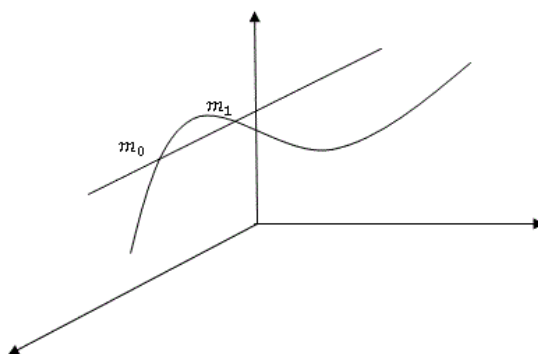
$$\begin{cases} x_a \dot{+} y_a &= (x+y)_a \\ \lambda x_a &= (\lambda x)_a \end{cases}$$

et le triplet $(\mathcal{T}_a(F), \dot{+}, \cdot)$ est un espace vectoriel

3.2. Espace tangent, Immersion et Submersion. La notion d'espace tangent généralise celle de la tangente à une courbe. Soit γ une courbe de classe C^1 :

$$\begin{aligned} \gamma : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+p} \\ t &\longrightarrow (x_1(t), \dots, x_{n+p}(t)) \end{aligned}$$

soit $m_0 = \gamma(t_0)$, un point de γ . On appelle tangente en m_0 à γ la limite de la "sécante" c'est à dire la droite qui passe par $m_0(t_0)$ et $m_1 = \gamma(t_0 + h)$ lorsque $m_1 \longrightarrow m_0$. ($h \rightarrow 0$).

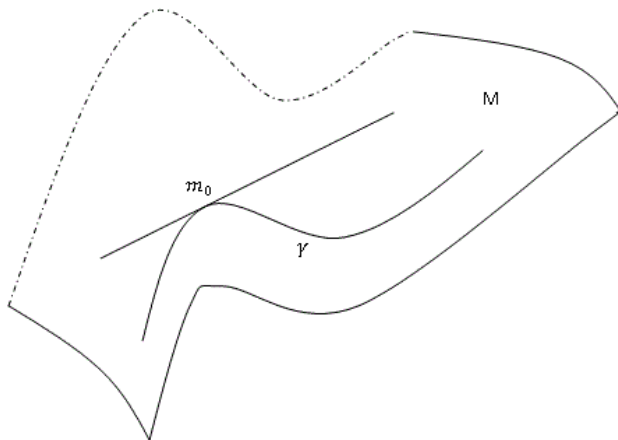


Soit le vecteur

$$\begin{aligned}\vec{V}_{m_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{m_0 m_1}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{x_1(t_0 + h) - x_1(t_0)}{h}, \dots, \frac{x_{n+p}(t_0 + h) - x_{n+p}(t_0)}{h} \right) \\ &= (x'_1(t_0), \dots, x'_{n+p}(t_0))\end{aligned}$$

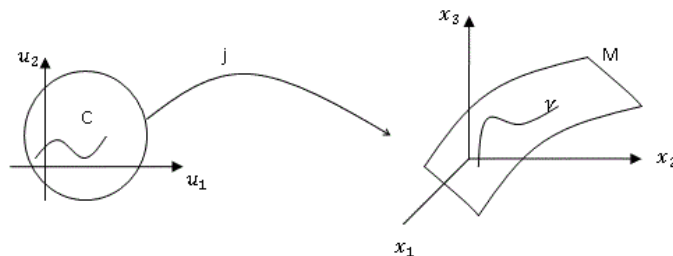
La droite portée par le vecteur \vec{V}_{m_0} est l'espace tangent à γ en m_0 .

DÉFINITION 3.2. Soit M une sous variété de \mathbb{R}^{n+p} de classe C^k , $m_0 \in M$. On appelle droite tangente à M en m_0 , toute droite de l'espace \mathbb{R}^{n+p} passant par m_0 et tangente en m_0 à une courbe quelconque tracée sur M et passant pas m_0 . On appelle espace tangent en m_0 à M , la réunion de toutes les droites tangentes à M en m_0 , cet espace est noté $T_{m_0}M$.



Dans la suite, on va caractériser algébriquement un espace tangent en un point à une sous variété. On va considérer d'abord, le cas où M est définie par un plongement

$$\begin{aligned}j : \Omega \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+p} \\ u = (u_1, \dots, u_n) &\longrightarrow (h_1(u), \dots, h_{n+p}(u))\end{aligned}$$



Une courbe γ de M est l'image par j d'une courbe C de Ω . soit $C(t) = u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$ une courbe C^1 de Ω alors $\gamma = j(C)$ est définie par

$$\gamma(t) = (h_1(u(t)), \dots, h_{n+p}(u(t)))$$

On va supposer que $u_0 = u(0)$ et $m_0 = j(u_0) = j \circ C(0)$. Un vecteur tangent à $\gamma(t)$ en m_0 est dirigé par

$$\frac{d\gamma}{dt}(0) = D(j \circ C)_{(0)} = D(j)_{C(0)} \times D(C)_{(0)}$$

c'est à dire

$$\frac{d\gamma}{dt}(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial u_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_{n+p}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial h_{n+p}}{\partial u_n} \end{pmatrix}_{(u_0)} \begin{pmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{du_n}{dt} \end{pmatrix}_{(0)}$$

En faisant varier (C) , on obtient avec $(C')_{(0)}$ tous les vecteurs de \mathbb{R}^n , ainsi les vecteurs directeurs des droites tangentes à M en m_0 sont exactement tous les vecteurs de $\text{Im}(Dj)_{(u_0)}$. Comme j est une immersion, alors $\text{rg}(Dj)_{(u_0)} = n$ et donc $T_{m_0}M$ est un espace affine de dimension n . Finalement $T_{m_0}M = m_0 + \text{Im}(Dj)_{(u_0)}$ est l'espace affine d'origine m_0 et de direction $\text{Im}(Dj)_{(u_0)}$, en particulier $\dim T_{m_0}M = \dim M$.

Supposons maintenant que M est définie localement par une submersion :

$$\begin{aligned} f : U \subset \mathbb{R}^{n+p} &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ x = (x_1, \dots, x_{n+p}) &\longrightarrow (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{aligned}$$

on a $M \cap U = \{x = (x_1, \dots, x_{n+p}) / f_1(x) = \dots = f_p(x) = 0\}$. Soit $j : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ une immersion M au voisinage de $m_0 \in U$. On a l'application nulle suivante :

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{j} M \cap U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p$$

$f \circ j(u_1, \dots, u_n) = 0, \forall (u_1, \dots, u_n) \in \Omega$. On en déduit que $(Df)_{(m_0)} \cdot (Dj)_{(0)} = 0$ où $m_0 = j(u_0)$ et par suite $\text{Im}(Dj)_{(u_0)} \subset \ker(Df)_{(m_0)}$, or f est une submersion donc $\text{rg}(Df)_{(m_0)} = p$ et d'après le théorème de la dimension

$$\dim \mathbb{R}^{n+p} = \dim \ker(Df)_{m_0} + \text{rg}(Df)_{m_0}$$

il en vient que $\dim \ker(Df)_{m_0} = n = \dim \text{Im}(Dj)_{u_0}$ et par conséquent les deux espaces sont égaux $\ker(Df)_{m_0} = \text{Im}(Dj)_{u_0}$. Finalement l'espace tangent à M en m_0 est $T_{m_0}M = m_0 + \ker(Df)_{m_0}$. On résume ces résultats par la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1. *Soit M une sous variété de dimension n de \mathbb{R}^{n+p} et $m_0 \in M$.*

- (1) *Si M est localement définie au voisinage de m_0 par une immersion $j : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ et $m_0 = j(u_0)$ alors l'espace tangent à M en m_0 est le sous espace affine d'origine m_0 et de direction $\text{Im}(Dj)_{u_0}$*

$$T_{m_0}M = j(u_0) + \text{Im}(Dj)_{u_0}$$

en particulier $\dim T_{m_0}M = \dim M$

- (2) *Si M est définie localement au voisinage de m_0 par une submersion $f : U \subset \mathbb{R}^{n+p} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ alors $T_{m_0}M$ est le sous espace affine de \mathbb{R}^{n+p} d'origine m_0 et de direction $\ker(Df)_{m_0}$*

$$T_{m_0}M = m_0 + \ker(Df)_{m_0}$$

4. Changement de coordonnées et espace tangent.

Soit M une sous variété de \mathbb{R}^{n+p} de dimension n , donnée localement par une immersion

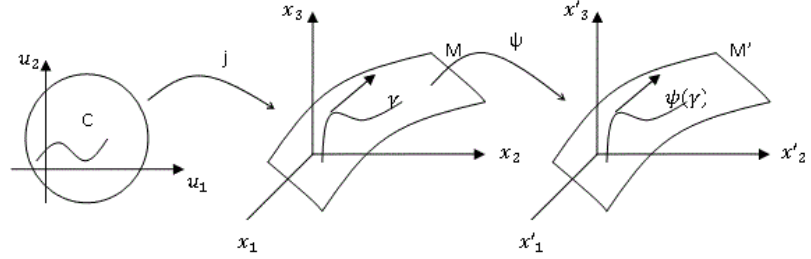
$$\begin{aligned} j : \Omega \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+p} \\ u = (u_1, \dots, u_n) &\longrightarrow (x_1(u), \dots, x_{n+p}(u)) \end{aligned}$$

et soit

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^{n+p} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+p} \\ x = (x_1, \dots, x_{n+p}) &\longrightarrow (x'_1, \dots, x'_{n+p}) \end{aligned}$$

un changement de coordonnées locales au voisinage de $m_0 \in M$. ($\det(D\psi)_{m_0}) \neq 0$. La sous variété M sera **localement** envoyée vers la sous variété $M' =$

$\psi(M)$



On a $M' = \text{Im}(\psi \circ j)$, c'est donc une sous variété de l'espace des variables x'_i . L'application ψ induit une application ψ_* entre les espaces tangents de la façon suivante : Soit $v \in T_{m_0}M$, il existe γ une courbe de M telle que $v = \frac{d\gamma}{dt}(0)$. Soit $\bar{\gamma} = \psi(\gamma)$ une courbe dans M' . On définit sur l'espace tangent $T_{m_0}M$ l'application ψ_* par :

$$\psi_*(v) = \frac{d\bar{\gamma}}{dt}(\psi(m_0)) = \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma)_{(m_0)}$$

soit

$$\begin{aligned} \psi_* : T_{m_0}M &\longrightarrow T_{\psi(m_0)}M' \\ v = \frac{d\gamma}{dt}(m_0) &\longrightarrow \bar{v} = \left(\frac{d\bar{\gamma}}{dt}\right)_{\psi(m_0)} \end{aligned}$$

où $\bar{\gamma} = \psi(\gamma)$. Calculons \bar{v} en fonction de v et de ψ :

On a $\gamma = j \circ C$ où j est une immersion qui paramétrise M sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et C est une courbe C^1 dans Ω . On a

$$v = \frac{d\gamma}{dt}(0) = (Dj)_{m_0} \cdot (C')_{(0)}$$

Comme $\bar{\gamma} = \psi(\gamma) = \psi \circ j \circ C$ alors

$$\bar{v} = \frac{d\bar{\gamma}}{dt}(0) = (D\psi)_{m_0} \cdot (Dj)_{C(0)} \cdot C'(0)$$

et donc $\bar{v} = (D\psi)_{m_0}(v)$.

PROPOSITION 4.1. Soit $\psi : \mathbb{R}^{n+p} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ un difféomorphisme défini au voisinage d'un point m_0 de M . Il existe une application qui transforme d'une façon naturelle $T_{m_0}M$ en $T_{\psi(m_0)}M'$

$$\begin{aligned} \psi_* : T_{m_0}M &\longrightarrow T_{\psi(m_0)}M' \\ v &\longrightarrow \bar{v} = (D\psi)_{m_0}(v) \end{aligned}$$

cette application donnée par le jacobien de ψ en m_0 est dite "application tangente en m_0 "

5. Exercices

EXERCICE 5.1. Montrer que l'application C^∞ donnée par

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow (t^2, t^3) \end{aligned}$$

n'est pas une immersion

EXERCICE 5.2. Soit $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$. On définit l'application C^∞

$$\begin{aligned} f : M &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow \left(\frac{y}{1 - x^2 - y^2}, e^{x^2} \right) \end{aligned}$$

- (1) Déterminer l'ensemble S de points M tel que f est une immersion
- (2) Montrer que $f(S)$ est un ouvert
- (3) Montrer que la sphère S^n est une sous variété fermée de \mathbb{R}^{n+1}

EXERCICE 5.3. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longrightarrow (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + z^2 \end{aligned}$$

Trouver les valeurs de a telles que $f^{-1}(\{a\})$ est une sous variété régulière de \mathbb{R}^3

EXERCICE 5.4. Soit l'application

$$\begin{aligned} j :]0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow (\sin t, \frac{1}{2} \sin 2t) \end{aligned}$$

- (1) Montrer que j est une immersion mais qu'elle n'est pas un plongement, en déduire que $\text{Im } j$ n'est pas une sous variété de \mathbb{R}^2
- (2) Trouver une application f , C^∞ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} telle que $\text{Im } j = f^{-1}(\{0\})$ mais que f n'est pas une submersion. En déduire que j ne peut pas être un homéomorphisme de $]0, 2\pi[$ dans $\text{Im } j$

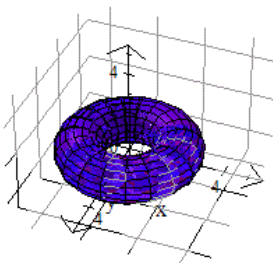
EXERCICE 5.5. Les sous ensembles suivants sont-ils des sous variétés :

- (1) la surface cubique $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1\}$
- (2) la fenêtre de Viviani $V = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } x^2 + y^2 - x = 0\}$

EXERCICE 5.6. Montrer que le tore de révolution obtenu par la rotation du cercle $(y - 2)^2 + z^2 = 1$ du plan yoz autour de l'axe oz est donné par la paramétrisation :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \varphi) &\longrightarrow ((2 + \cos\theta) \cos\varphi, (2 + \cos\theta) \sin\varphi, \sin\theta) \end{aligned}$$

en déduire qu'il s'agit d'une sous variété de \mathbb{R}^3 de dimension 2



EXERCICE 5.7. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$

- (1) Montrer que $C = f^{-1}(\{0\})$ est une sous variété de \mathbb{R}^3
- (2) Montrer que le vecteur

$$v = (a, b, c)_{(0,1,1)}$$

est tangent à (C) si et seulement si $b = 0$

EXERCICE 5.8. Soit

$$\begin{aligned} j : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow (x(t) = t, y(t) = t^2 + 1) \end{aligned}$$

et soit $M = \text{Im } j$

- (1) Vérifier que M est une sous variété de dimension 1 de \mathbb{R}^2
- (2) Soit l'application

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow (x' = x, y' = y - x^2) \end{aligned}$$

- (a) Vérifier que ψ définit un changement de variable et déterminer la sous variété $M' = \psi(M)$
- (b) Soit $p = (a, b) \in M$. Déterminer l'application tangente en p , $\psi_*|_p : T_p M \longrightarrow T_{\psi(p)} M'$. Expliciter l'image de $v = (2, 0)$ au point $p = (0, 1)$.

EXERCICE 5.9. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$

- (1) Montrer que $C = f^{-1}\{0\}$ est une sous variété de \mathbb{R}^3
- (2) Montrer que le vecteur

$$v = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{(0,1,1)}$$

est tangent à C si et seulement si $b = 0$

EXERCICE 5.10. Soit l'application

$$\begin{aligned} j : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow (x(t) = t, y(t) = t^2 + 1) \end{aligned}$$

$M = \text{Im } j$ et soit l'application

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow (x' = x, y' = y - x^2) \end{aligned}$$

et $M' = \psi(M)$

- (1) Vérifier que M est une sous variété de \mathbb{R}^2 et que ψ est un changement de coordonnées sur \mathbb{R}^2
- (2) Donner l'application tangente ψ_* induite par ψ au point $p = (a, b) \in M$
- (3) Donner $\psi_* v$ au point p pour $v = (2, 0)$, $p = (0, 1)$ et faites une illustration géométrique.

CHAPITRE 2

Variété différentielle

1. Introduction

Dans ce chapitre on va introduire la notion abstraite de variétés différentielles, c'est à dire, on va définir des objets qui sont en réalité les sous variétés de \mathbb{R}^{n+p} , sans faire référence aux paramétrisations qui les définissent mais en s'intéressant à la notion intrinsèque. L'exemple suivant explique une des raisons pour ce détour :

Il existe deux types de courbes connexes dans \mathbb{R}^n , le premier est la droite \mathbb{R} et le second est le cercle S^1 et il n'y en a pas d'autre d'après le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1. *Soit C une courbe connexe de \mathbb{R}^n alors*

- (1) *si C est compacte, il existe alors un plongement $\phi : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\phi(S^1) = C$*
- (2) *si C n'est pas connexe, il existe alors un plongement $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\phi(\mathbb{R}) = C$.*

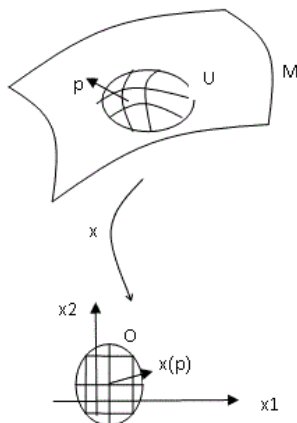
Ainsi, modulo un plongement il y a deux courbes connexes de \mathbb{R}^n , d'où l'intérêt de faire une étude intrinsèque sur les cercles et les droites. Le point de vue intrinsèque consiste à dégager les définitions et les propriétés sans faire référence au paramétrage.

2. Atlas

DÉFINITION 2.1. *Soit M un ensemble. Une bijection $x : U \subset M \longrightarrow O$ où O est un ouvert de \mathbb{R}^n , est dite carte de dimension n , U est dit "domaine de la carte". Si*

$$\begin{array}{rcl} P_i : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t_1, \dots, t_n) & \longmapsto & t_i \end{array}$$

alors les fonctions $x_i = P_i \circ x : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sont dites fonction coordonnées. Pour cela, le couple (x, U) est dit aussi système de coordonnées locales



EXEMPLE 2.1. $M = \mathbb{R}^n, x = id : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une carte de dimension n dite "carte triviale"

EXEMPLE 2.2. $M = M_{n,p}(\mathbb{R}), x : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ définie par $x(a_{ij}) = (a_{11}, \dots, a_{np})$

Dans les deux exemples précédents, x est une carte globale définie sur M tout entier. En général, il n'est pas possible d'avoir une carte globale ayant M comme domaine car cela voudrait dire qu'au sens de la bijection que tout ensemble M est équivalent à \mathbb{R}^n .

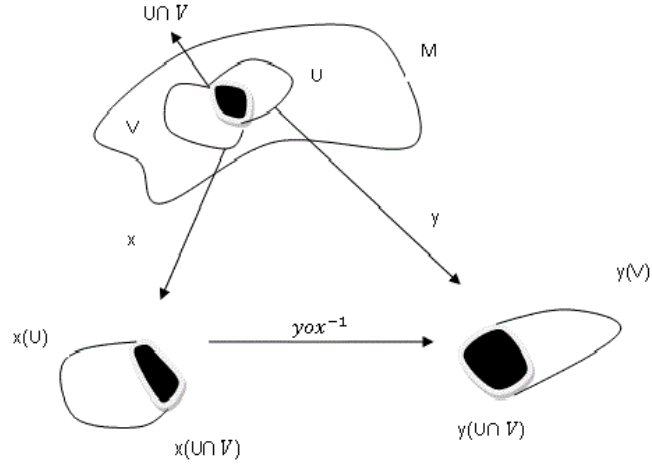
DÉFINITION 2.2. Soient (x, U) et (y, V) deux cartes locales sur M . On dit que ces cartes sont C^k -équivalentes si l'application

$$y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \longrightarrow y(U \cap V)$$

est un C^k -difféomorphisme entre deux ouverts de \mathbb{R}^n , c'est à dire :

- (1) $x(U \cap V)$ et $y(U \cap V)$ sont deux ouverts de \mathbb{R}^n
- (2) $y \circ x^{-1}$ et $x \circ y^{-1}$ sont de classe C^k .

On dit aussi que (x, U) et (y, V) sont C^k -liées ou que $y \circ x^{-1}$ et $x \circ y^{-1}$ sont de changements de cartes.



DÉFINITION 2.3. On appelle C^k -atlas de M sur \mathbb{R}^n , une collection de cartes $(x_\alpha, U_\alpha)_\alpha$ qui sont C^k -liées et telle que $M = \bigsqcup_\alpha U_\alpha$.

EXEMPLE 2.3. Soit $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. On considère

$$\begin{cases} U &= \{(\cos \theta, \sin \theta) \in M \mid 0 < \theta < 2\pi\} \\ V &= \{(\cos \theta, \sin \theta) \in M \mid -\pi < \theta < \pi\} \end{cases}$$

les deux bijections x et y définies respectivement sur U et V par $x(\cos \theta, \sin \theta) = \theta$ et $y(\cos \theta, \sin \theta) = \theta$ définissent deux cartes locales de M . On va vérifier que

$$\mathcal{A} = \{(x, U), (y, V)\}$$

est un atlas de M sur \mathbb{R} .

En effet, $M = U \cup V$ et d'autre part, ces deux cartes sont liées :

$$\begin{aligned} x(U \cap V) &=]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[\\ y(U \cap V) &=]0, \pi[\cup]-\pi, 0[\end{aligned}$$

sont deux ouverts de \mathbb{R} , de plus l'application

$$\begin{aligned} y \circ x^{-1} :]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[&\longrightarrow]0, \pi[\cup]-\pi, 0[\\ \theta &\longrightarrow \begin{cases} \theta & \text{si } \theta \in]0, \pi[\\ \theta - 2\pi & \text{si } \theta \in]\pi, 2\pi[\end{cases} \end{aligned}$$

est un C^∞ difféomorphisme, par suite les deux cartes sont C^∞ -liées et \mathcal{A} est un C^∞ atlas de M sur \mathbb{R} .

3. Atlas maximal-Variétés différentielles

Un atlas permet de définir des systèmes de coordonnées sur un ensemble, cependant, cela n'est pas suffisant : Soit par exemple (\mathbb{R}^n, id) c'est un atlas formé d'une seule carte sur \mathbb{R}^n mais l'on aurait envie de considérer d'autres systèmes de coordonnées, c'est pour cela on s'intéresse à un atlas qui contient tous les changements de coordonnées.

Soient \mathcal{A} et \mathcal{A}' deux C^k atlas de M sur \mathbb{R}^n . L'ensemble des cartes de \mathcal{A} et \mathcal{A}' n'est pas en général un C^k atlas de M car si $x \in \mathcal{A}$ et $y \in \mathcal{A}'$ alors $y \circ x^{-1}$ peut ne pas être un difféomorphisme.

DÉFINITION 3.1. Deux C^k atlas de M sur \mathbb{R}^n sont dits équivalents si leur réunion est un C^k atlas de \mathbb{R}^n .

EXEMPLE 3.1. On va définir sur $M = S^1$ un autre atlas \mathcal{A}' formé de 4 cartes et on va montrer que \mathcal{A}' est équivalent à \mathcal{A} l'atlas de deux cartes introduit dans l'exemple 2.3. On considère les cartes suivantes sur M

$$\begin{cases} U_1 = \{(x, y) \in M \mid x > 0\} \\ U_2 = \{(x, y) \in M \mid y > 0\} \\ U_3 = \{(x, y) \in M \mid x < 0\} \\ U_4 = \{(x, y) \in M \mid y < 0\} \end{cases}$$

On a $M = \bigsqcup_{i=1}^4 U_i$ et soient les bijections $x_i : U_i \rightarrow]-1, 1[$ données par

$$\begin{cases} x_1(x, y) = y \\ x_2(x, y) = x \\ x_3(x, y) = y \\ x_4(x, y) = x \end{cases}$$

ces cartes sont deux à deux liées, mais on va présenter dans cet exemple la vérification de l'équivalence entre (x_1, U_1) et (x_2, U_2) . On a

$$x_1(U_1 \cap U_2) =]0, 1[; \quad x_2(U_1 \cap U_2) =]0, 1[$$

sont deux ouverts de \mathbb{R} et $x_2 \circ x_1^{-1}$ est donnée par

$$x_2 \circ x_1^{-1} : \begin{array}{ccc}]0, 1[& \longrightarrow &]0, 1[\\ t & \longrightarrow & s = \sqrt{1-t^2} \end{array}$$

est un C^∞ -difféomorphisme et par suite \mathcal{A}' est un C^∞ atlas de M sur \mathbb{R} .

Pour montrer que $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$ il suffit de montrer qu'une carte de l'un est liée à une carte de l'autre, par exemple on va montrer que (x, U) de \mathcal{A} est C^∞ liée à (x_1, U_1) de \mathcal{A}' . en effet, on a $U \cap U_1 = A \cup B$ avec

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in M \mid x > 0 \text{ et } y > 0\} \\ B &= \{(x, y) \in M \mid x > 0 \text{ et } y < 0\} \end{aligned}$$

il en vient que $x(U \cap U_1) =]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$ et $x_1(U \cap U_1) =]0, 1[\cup]-1, 0[$ qui sont deux ouverts de \mathbb{R} et $x_1 \circ x^{-1}$ est donnée par

$$x_1 \circ x^{-1} : \begin{array}{ccc}]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[& \longrightarrow &]0, 1[\cup]-1, 0[\\ \theta & \longrightarrow & \sin \theta \end{array}$$

qui est un C^∞ difféomorphisme et par suite les deux atlas sont C^∞ équivalents.

DÉFINITION 3.2. Si \mathcal{A} est un C^k atlas de M alors $\bar{\mathcal{A}} = \bigsqcup_{\mathcal{A}' \sim \mathcal{A}} \mathcal{A}'$ est le seul C^k atlas contenant \mathcal{A} et n'est contenu dans aucun autre atlas, il est dit le C^k atlas maximal,

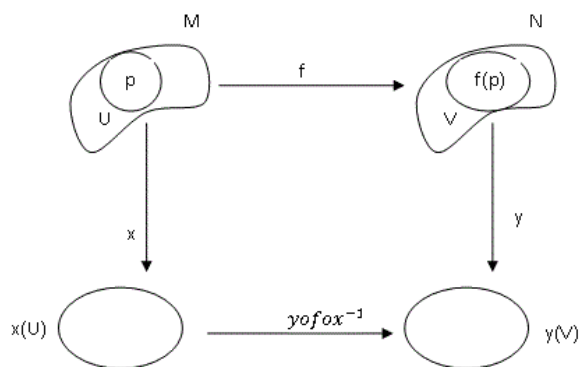
DÉFINITION 3.3. Le couple $(M, \bar{\mathcal{A}})$ est dite "variété différentiable" de classe C^k et de dimension n . Lorsque la variété est de classe C^∞ on dit qu'elle est une variété différentielle.

4. Fonctions différentiables

DÉFINITION 4.1. Soient M et N deux variétés de classe C^k . Une application f de M dans N est dite de classe C^r ($r \leq k$) au point $p \in M$, s'il existe une carte (x, U) autour de p et une carte (y, V) autour de $f(p)$ telle l'application

$$y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \longrightarrow y(V)$$

est de classe C^r au point $x(p)$



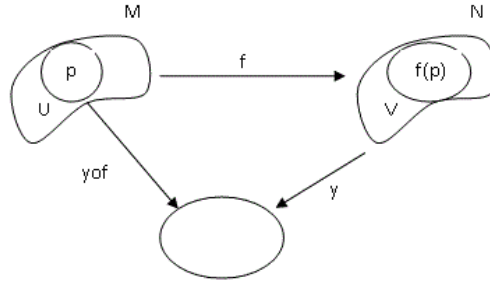
REMARQUE 4.1. Cette définition ne dépend pas du choix des cartes : en effet, si on prend x' et y' d'autres cartes autour de p et $f(p)$ respectivement alors on a

$$y' \circ f \circ x'^{-1} = (y' \circ y^{-1}) \circ (y \circ f \circ x^{-1}) \circ (x \circ x'^{-1})$$

avec $(y' \circ y^{-1})$ et $(x \circ x'^{-1})$ sont C^k , ainsi $y' \circ f \circ x'^{-1}$ est de classe C^r .

DÉFINITION 4.2. Une application f de M sur N est dite difféomorphisme de classe C^r si f est bijective et f et f^{-1} sont de classe C^r .

PROPOSITION 4.1. Soient M et N deux variétés de classe C^k et $f : M \rightarrow N$ une bijection, alors : f est un difféomorphisme de classe C^k si et seulement si f échange les atlas c'est à dire : si $y \in \mathcal{A}(N)$ alors $y \circ f \in \mathcal{A}(M)$ et si $x \in \mathcal{A}(M)$ alors $x = y \circ f$ avec $y \in \mathcal{A}(N)$.



DÉMONSTRATION. Supposons que l'on a l'équivalence : $y \in \mathcal{A}(N) \iff y \circ f \in \mathcal{A}(M)$, montrons que f est un C^k difféomorphisme. Soit $y \in \mathcal{A}(N)$ donc $y \circ f \in \mathcal{A}(M)$ et donc $y \circ f$ est C^k liée à toute carte $x \in \mathcal{A}(M)$. C'est à dire, pour tout $x \in \mathcal{A}(M)$ on a $(y \circ f) \circ x^{-1}$ est C^k et par suite f est de classe C^k . De même, $x \in \mathcal{A}(M)$ donc il existe $y \in \mathcal{A}(N)$ telle que $x = y \circ f$, ainsi $y \circ f$ est C^k liée avec toute carte $z \in \mathcal{A}(M)$ c'est à dire $z \circ (y \circ f)^{-1}$ est C^k donc $z \circ f^{-1} \circ y$ est C^k et cela voudrait dire que $f^{-1} : N \rightarrow M$ est C^k et par suite f est un C^k difféomorphisme.

La réciproque est évidente. \square

EXEMPLE 4.1. On va considérer l'application $f : (S^1, \mathcal{A}) \longrightarrow (S^1, \mathcal{A}')$ qui à tout point de S^1 fait correspondre son opposé par rapport à l'origine. On rappelle que \mathcal{A} et \mathcal{A}' sont les atlas donnés dans les exemples (2.3) et (3.1). On propose de montrer que cette application est différentiable en tout point (a, b) de S^1 tel que $b > 0$. En effet, soit $(a, b) \in S^1$ tel que $b > 0$. La carte (x, U) de \mathcal{A} contient (a, b) , donc $(a, b) = (\cos \theta, \sin \theta)$ pour $\theta \in]0, \pi[$ et $x(a, b) = \theta$. L'image de (a, b) par f est le point $(-a, -b)$ de S^1 . On a $f(a, b) = (-a, -b) \in U_4 \in \mathcal{A}'$ avec $x_4(f(a, b)) = -a = -\cos \theta$ et finalement :

$$x_4 \circ f \circ x^{-1} : \begin{array}{ccc}]0, 2\pi[& \longrightarrow &]-1, 1[\\ \theta & \longrightarrow & -\cos \theta \end{array}$$

qui est une application de classe C^∞ .

5. Topologie sur une variété

Vue qu'une variété généralise \mathbb{R}^n il est impérative que la différentiabilité sur les variétés soit une *extension* de la différentiabilité sur \mathbb{R}^n . On est donc amené à introduire la notion de continuité entre les variétés, donc une topologie sur une variété et à montrer ensuite que toute application différentiable est continue.

PROPOSITION 5.1. Soit M une C^k -variété différentiable, (x, U) est une carte de M et $W \subset U$. Si $x(W)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n alors $(x|_W, W)$ est une carte de M de la même structure différentielle ($(x, U) \in \mathcal{A}$ alors $(x|_W, W) \in \mathcal{A}$).

DÉMONSTRATION. On va montrer que $\bar{x} = x|_W$ est C^k -liée à toute carte de \mathcal{A} . En effet, soit $(y, U') \in \mathcal{A}$, on a

$$\begin{cases} \bar{x} \circ y^{-1} &= (x \circ y^{-1})|_{(U' \cap W)} \\ y \circ \bar{x}^{-1} &= (y \circ x^{-1})|_{(U' \cap W)} \end{cases}$$

et puisque $x \circ y^{-1}$ et $y \circ x^{-1}$ sont de classe C^k , alors il en est de même pour $\bar{x} \circ y^{-1}$ et $y \circ \bar{x}^{-1}$, par suite $(\bar{x}, W) \in \mathcal{A}$ \square

PROPOSITION 5.2. La collection de tous les domaines de cartes de \mathcal{A} forme une base de topologie sur M . Cette topologie est dite "topologie intrinsèque de M ".

DÉMONSTRATION. On a $M = \bigsqcup_{U \in \mathcal{A}} U$. Aussi, si $U, V \in \mathcal{A}$ alors $x(U \cap V)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n et donc, d'après la proposition précédente $U \cap V \in \mathcal{A}$ et par suite $\mathcal{B} = \{U_\alpha \mid (x_\alpha, U_\alpha) \in \mathcal{A}\}$ est une base de topologie sur (M, \mathcal{A}) . \square

COROLLAIRE 5.1. Si $f : (M, \mathcal{A}) \longrightarrow (M', \mathcal{A}')$ est différentiable alors f est continue.

DÉMONSTRATION. Soient (x, U) et (y, V) deux cartes de M et M' respectivement. On a $g = y \circ f \circ x^{-1}$ est différentiable, donc g est continue. D'autre part,

$$x : U \longrightarrow x(U) = O$$

est bijective. Si O' est un ouvert de \mathbb{R}^n alors $W = x^{-1}(O \cap O')$ est une carte de M (car $x(W) = O \cap O'$ est un ouvert de \mathbb{R}^n), donc c'est un ouvert et par suite x est continue. Aussi, si W est une carte de M donc un ouvert de M , on a $x(U \cap W)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n car U et W appartiennent à un même atlas. Par suite x est un homéomorphisme. De même y est un homéomorphisme. Finalement, on a $y \circ f \circ x^{-1}$ est continue, y et x^{-1} sont continues et par suite f est continue. \square

Dans la démonstration précédente, on a dit que si (x, U) est une carte de M alors $x : U \longrightarrow O = x(U)$ est un homéomorphisme relativement à la topologie intrinsèque \mathcal{T}_M . Le problème qui se pose ensuite est le suivant : Si (M, \mathcal{T}) est un espace topologique et si l'on définit sur M une structure de variété qui induit la topologie intrinsèque \mathcal{T}_M . Dans quels cas (relativement à \mathcal{T}) a-t-on $\mathcal{T} = \mathcal{T}_M$?

Il est clair que si $\mathcal{T} = \mathcal{T}_M$ alors les cartes de M qui sont \mathcal{T}_M homéomorphes sur des ouverts de \mathbb{R}^n doivent être des \mathcal{T} - homéomorphes. On va montrer dans la proposition qui suit que la réciproque est vraie.

PROPOSITION 5.3. *Soit (M, \mathcal{T}) un espace topologique. On suppose que M est munie d'une structure de variété et soit \mathcal{T}_M la topologie intrinsèque de M . On a : $(\mathcal{T} = \mathcal{T}_M)$ si et seulement si (il existe un atlas sur M dont les cartes sont des \mathcal{T} - homéomorphes avec des ouverts de \mathbb{R}^n)*

DÉMONSTRATION. On va supposer que les cartes de M sont des \mathcal{T} - homéomorphismes, montrons d'abord que $\mathcal{T}_M \subset \mathcal{T}$: Soit $U \in \mathcal{T}_M$ et soit (x, W) une carte telle que $W \cap U \neq \emptyset$, on a $W \cap U \in \mathcal{T}_M$ donc $x|_{U \cap W} : U \cap W \longrightarrow O \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ est un \mathcal{T} -homéomorphisme et donc $U \cap W = (x|_{U \cap W})^{-1}(O) \in \mathcal{T}$, sachant que $U = \bigsqcup_{W \in \mathcal{A}} (U \cap W)$ on a donc $U \in \mathcal{T}$ et par suite $\mathcal{T}_M \subset \mathcal{T}$.

Réciproquement, montrons que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_M$: Soit $U' \in \mathcal{T}$ et soit (x, W) une carte de \mathcal{A} telle que $U' \cap W \neq \emptyset$. Comme $W \in \mathcal{T}_M$ on a alors $W \in \mathcal{T}$ et donc $U' \cap W \in \mathcal{T}$, or les cartes de M sont \mathcal{T} - homéomorphes, ainsi $x(U' \cap W)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n et donc $U' \cap W$ est une carte de M donc $U' \cap W \in \mathcal{T}_M$. Il en vient que $U' = \bigsqcup_{W \in \mathcal{A}} (U' \cap W) \in \mathcal{T}_M$, d'où $\mathcal{T} = \mathcal{T}_M$. \square

La construction précédente nous mène à la définition d'une variété topologique

DÉFINITION 5.1. *Soit M un espace topologique. On dit que M est une variété topologique de dimension n si pour tout point $p \in M$ il existe un voisinage ouvert de p et un homéomorphisme x de U sur un ouvert O de \mathbb{R}^n .*

6. Germes

On note par $\mathcal{C}^r(M) = \{ f : M \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^r \}$, le quadriplet $(\mathcal{C}^r(M), +, \cdot, \times)$ est une algèbre pour les lois habituelles :

$$\begin{cases} (f + g)_p = f(p) + g(p) \\ (\lambda f)_p = \lambda \cdot f(p) \\ (f \times g)_p = f(p) \times g(p) \end{cases}$$

pour tout $p \in M$.

Soit $p \in M$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un voisinage de p . On dit que f est une fonction locale au point p . On note par

$$\mathcal{F}_p^r(M) = \{ f \text{ une fonction locale en } p \text{ qui est de classe } C^r \text{ en } p \}$$

Pour tous $f, g \in \mathcal{F}_p^r(M)$, c'est à dire

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ et } g : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

sont deux fonctions C^r en p l'addition, la multiplication e la multiplication par scalaire sont définies sur $U \cap V$ par

$$\begin{cases} \lambda f + \mu g : U \cap V \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad \quad \quad p \quad \quad \quad \rightarrow \lambda f(p) + \mu g(p) \\ f \times g : U \cap V \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad \quad \quad p \quad \quad \quad \rightarrow f(p) \times g(p) \end{cases}$$

ne font pas de $\mathcal{F}_p^r(M)$ une algèbre, car par exemple si $U \neq V$ on a

$$f + (-f) : U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ et } g + (-g) : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

ne sont pas égales et donc 0 l'élément neutre n'existe pas dans $\mathcal{F}_p^r(M)$. Pour bien définir l'élément neutre il faudrait se restreindre sur l'intersection :

On introduit la notion de germes de fonctions locales, on définit sur $\mathcal{F}_p^r(M)$ la relation d'équivalence

$$f \sim g \text{ si et seulement si } (\exists W \subset U \cap V \ / \ f|_W = g|_W)$$

Toute classe d'équivalence est dite *germe* de fonction locale de classe C^r en p . On note par $\mathcal{C}^r(p) = \mathcal{F}_p^r(M) / \sim$ et $(\mathcal{C}^r(p), +, \cdot, \times)$ est une algèbre, dite algèbre locale au point p des germes C^r .

6.1. Notation. Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable au point $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, on note par

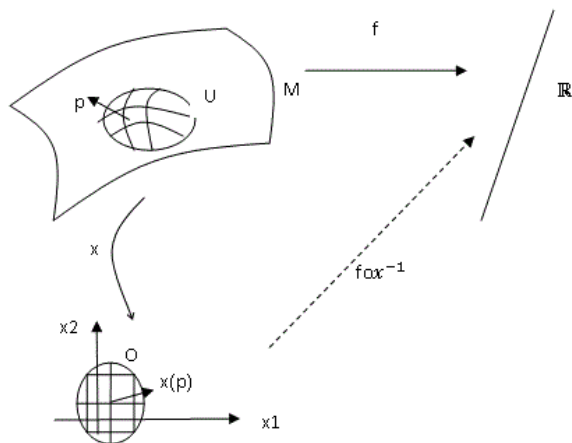
$$(D_i f)_a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a)}{h}$$

On a

$$D_j(f \circ g)_a = \underbrace{(D_i f)_{g(a)}}_{1 \times n} \times \underbrace{(D_j g^i)_{(a)}}_{n \times 1} = \sum_i [(D_i f)_{g(a)} \cdot (D_j g^i)_{(a)}]$$

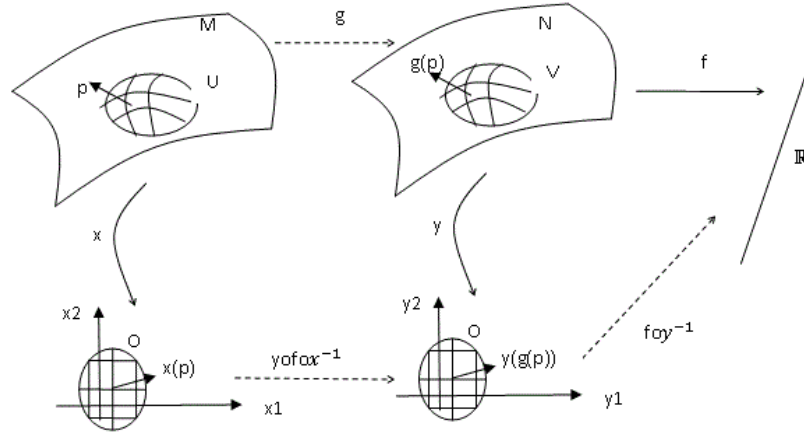
pour tout $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Si $f \in \mathcal{C}^r(p)$ on pose $(\frac{\partial f}{\partial x_i})_p = D_i(f \circ x^{-1})_{x(p)}$



De même, si $g : M \rightarrow N$ est une fonction différentiable en $p \in M$ c'est à dire il existe une carte (x, U) autour de p et une carte (y, V) autour de $g(p)$ telle que $y \circ g \circ x^{-1}$ est différentiable en $x(p)$. On va noter par $g^j = y^j \circ g$. Pour tout $f \in \mathcal{C}^r(g(p))$ on a

$$\left(\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_i}\right)_p = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial y^j}\right)_{g(p)} \cdot \left(\frac{\partial g^j}{\partial x_i}\right)_p$$



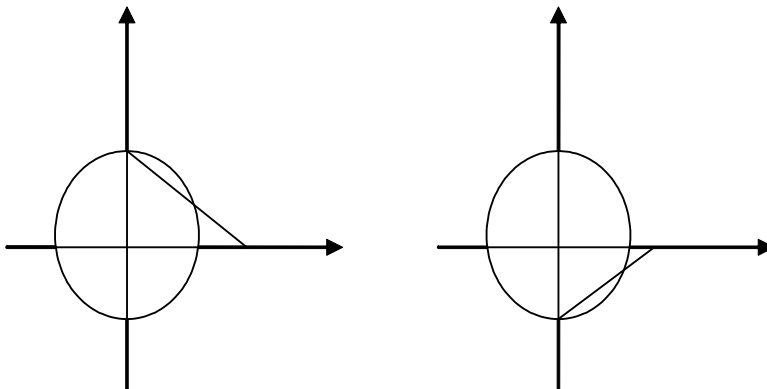
7. Exercices

EXERCICE 7.1. On considère le cercle unité de \mathbb{R}^2 , S^1 . On admet que $A = \{(U_i, \varphi_i); i = 1 \dots 4\}$ avec

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x, y) \in S^1; x > 0\} & \varphi_1(x, y) &= y \\ U_2 &= \{(x, y) \in S^1; y > 0\} & \varphi_2(x, y) &= x \\ U_3 &= \{(x, y) \in S^1; x < 0\} & \varphi_3(x, y) &= y \\ U_4 &= \{(x, y) \in S^1; y < 0\} & \varphi_4(x, y) &= x \end{aligned}$$

est un atlas sur S^1 . On considère l'ensemble $A' = \{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$ avec $U_N = \{(x, y) \in S^1; y \neq 1\}$ et $U_S = \{(x, y) \in S^1; y \neq -1\}$, φ_N et φ_S sont les projections stéréographiques depuis le pôle nord et le pôle sud de S^1

respectivement :



- (1) Vérifier (en utilisant le théorème de Thalès) que $\varphi_N(x, y) = \frac{x}{1-y}$ pour tout $(x, y) \in U_1$ et $\varphi_S(x, y) = \frac{x}{1+y}$ pour tout $(x, y) \in U_2$
- (2) Montrer que A' est un C^∞ atlas sur S^1
- (3) Montrer que A et A' sont équivalents. (Contentez vous de démontrer par exemple que (U_2, φ_2) et (U_N, φ_N) sont équivalentes)

EXERCICE 7.2. Soit

$$U = \{(\sin 2\pi s; \cos 2\pi s) \in S^1, s \in]0; 1[\}$$

$$V = \{(\sin 2\pi s; \cos 2\pi s) \in S^1, s \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[\}$$

$$\begin{array}{ccc} \varphi : & U & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (\sin 2\pi s; \cos 2\pi s) & \longrightarrow s \end{array} ; \quad \begin{array}{ccc} \psi : & V & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (\sin 2\pi s; \cos 2\pi s) & \longrightarrow s \end{array}$$

- (1) Montrer que $A = \{(U, \varphi); (V, \psi)\}$ est un C^∞ -atlas de S^1
- (2) On rappelle que $A_1 = \{(U_i, \varphi_i); i = 1 \cdots 4\}$ avec

$$U_1 = \{(x, y) \in S^1; x > 0\} \quad \varphi_1(x, y) = y$$

$$U_2 = \{(x, y) \in S^1; y > 0\} \quad \varphi_2(x, y) = x$$

$$U_3 = \{(x, y) \in S^1; x < 0\} \quad \varphi_3(x, y) = y$$

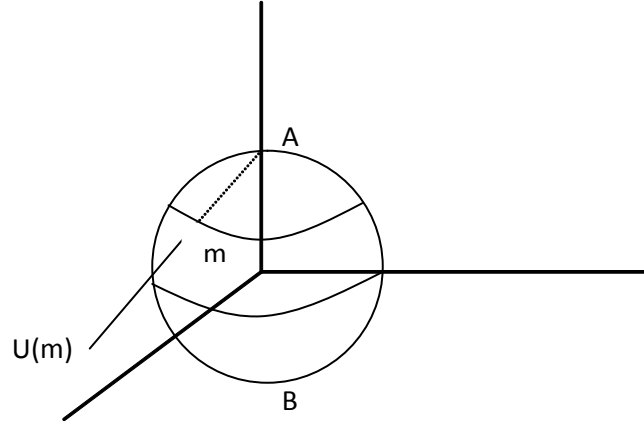
$$U_4 = \{(x, y) \in S^1; y < 0\} \quad \varphi_4(x, y) = x$$

est un atlas sur S^1 . Vérifier que A et A_1 sont équivalents (contentez vous de vérifier cela avec $(U_2; \varphi_2)$).

EXERCICE 7.3. Soit $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la sphère unité de \mathbb{R}^3 . $A = (0, 0, 1)$ et $B = (0, 0, -1)$ sont les pôles nord et sud de S^2 . On considère l'application

$$u : U = S^2 \setminus A \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

qui à tout point $m = (x, y, z) \in S^2 \setminus A$ fait correspondre le point $u(m) = (u_1, u_2)$ d'intersection du plan oxy avec la droite Am



- (1) Trouver l'équation paramétrique de la droite Am , en déduire que $u_1 = \frac{x}{1-z}$; $u_2 = \frac{y}{1-z}$
- (2) De même, on considère l'application $v : V = S^2 \setminus B \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui à tout point $m' = (x, y, z) \in S^2 \setminus B$ fait correspondre l'intersection $v(m') = (v_1, v_2)$ de la droite Bm' avec le plan oxy . Exprimer v_1, v_2 en fonction de x, y, z .
- (3) Dans cette partie on voudrait montrer que $\Omega = \{(u, U), (v, V)\}$ est un C^∞ atlas sur S^2 :

- (a) Vérifier que $\{U, V\}$ est recouvrement de S^2
- (b) Montrer que u est un difféomorphisme sur U

$$\begin{aligned} u : U &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (u_1, u_2) \end{aligned}$$

(Ind : Vérifier que $u_1^2 + u_2^2 = \frac{1+z}{1-z}$, en déduire une expression de u^{-1} , conclure alors que u est bijective et que c'est un difféomorphisme)

- (c) Vérifier que le changement de cartes

$$v \circ u^{-1} : u(U \cap V) \longrightarrow v(U \cap V)$$

est un difféomorphisme. (Ind : Prenez $(u_1, u_2, 0) \in u(U \cap V)$ et calculer $v \circ u^{-1}(u_1, u_2, 0)$ ensuite conclure)

- (d) On rappelle que $S^2 = f^{-1}(0)$ où $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Soit $m_0(x_0, y_0, z_0) \in S^2$ on a

$$T_{m_0}S^2 = \ker D_{m_0}f = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid (D_{m_0}f)(X, Y, Z) = 0\} = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\nabla f)_{m_0} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0\}$$

Montrer que le champ sur \mathbb{R}^3 : $Z = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + 0 \frac{\partial}{\partial z}$ est tangent à S^2 .

(e) Sachant que

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u_2} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial u_2} \end{cases}$$

Trouver $u_*(Z)$ dans les coordonnées (u_1, u_2)

(f) Exprimer $\frac{\partial}{\partial u_1}$, $\frac{\partial}{\partial u_2}$ en fonction de v_1 , v_2 , $\frac{\partial}{\partial v_1}$, $\frac{\partial}{\partial v_2}$ et déduire de e) $v_*(Z)$ dans les coordonnées (v_1, v_2)

(4) Montrer que l'injection canonique de S^2 dans \mathbb{R}^3 est de classe C^∞

(5) Montrer qu'une application $f : X \rightarrow S^2$ est C^∞ ssi $i \circ f$ l'est.

CHAPITRE 3

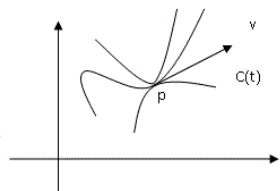
Espace tangent

Le but de ce chapitre est de définir la notion de vecteur tangent en un point p d'une variété

1. Rappel, cas où la variété est \mathbb{R}^n

DÉFINITION 1.1. *On appelle vecteur tangent en $p \in \mathbb{R}^n$, tout couple (p, v) où $p \in \mathbb{R}^n$ et v est un vecteur issu de p . Les vecteurs tangents à \mathbb{R}^n peuvent être identifiés aux éléments de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.*

Pour pouvoir transporter cette notion sur les variétés, on observe d'abord que tout élément de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ peut être vu comme le vecteur vitesse d'une courbe. Si $(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, il existe toute une famille de courbes passant pas p et ayant v comme vecteur vitesse en p



c'est à dire il existe une courbe $C : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

$$\begin{cases} C(t_0) &= p \\ C'(t_0) &= v \end{cases}$$

On peut faire la construction suivante : On considère sur l'ensemble des courbes de classe C^1 sur un voisinage de 0 et à valeurs dans \mathbb{R}^n , la relation

d'équivalence

$$C_1 \sim C_2 \text{ ssi } \begin{cases} C_1(0) = C_2(0) \\ C_1'(0) = C_2'(0) \end{cases}$$

et on définit un vecteur tangent en $p \in \mathbb{R}^n$ par $v = [C]$ avec $C(0) = p$. "Ce serait comme si on disait que telle personne est celle dont on voit l'image dans le miroir."

Un autre point à traiter dans le cas où la variété est \mathbb{R}^n et qui nous aide dans la construction de notre théorie sur une variété quelconque est la notion de la dérivée directionnelle d'une fonction réelle définie sur \mathbb{R}^n et de son interprétation géométrique.

DÉFINITION 1.2. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Soit $(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ un vecteur tangent en p que l'on note par v_p . La dérivée directionnelle de f dans la direction de v_p est

$$v_p(f) = \langle (\nabla f)_p, v_p \rangle = \sum_{i=1}^n v^i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

où $(\nabla f)_p$ est le vecteur gradient de f en p .

Interprétation géométrique : On considère une courbe intégrale de v_p c'est à dire un représentant de la classe d'équivalence (C) tel que

$$\begin{cases} C(0) = p \\ C'(0) = v_p \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{d(f \circ C)(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_p \cdot \left(\frac{dC^i}{dt} \right)_0 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_p \cdot v^i \\ &= \langle v_p, (\nabla f)_p \rangle \end{aligned}$$

Il en vient que la dérivée directionnelle de f selon v_p n'est autre que la dérivée de f le long d'une courbe intégrale de v_p et cette dérivée ne dépend pas du choix de la courbe. Ainsi, on vient d'établir un dictionnaire entre les vecteurs tangents et les dérivations des fonctions C^1 selon une direction. Cette remarque peut être consolidée d'après les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} v_p(f + g) = v_p(f) + v_p(g) \\ v_p(k \cdot f) = k \cdot v_p(f), \quad k \in \mathbb{R} \\ v_p(f \cdot g) = v_p(f) \cdot g_p + v_p(g) \cdot f_p \end{cases}$$

Nous verrons ci dessous que ces trois propriétés, caractérisent, parmi les opérateurs différentiels ceux qui sont des dérivations selon une direction. En d'autres termes, si l'on a une application

$$D : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$$

où $\mathcal{C}^\infty(p)$ est l'algèbre locale des germes des fonctions C^∞ en p telle que

$$\begin{aligned} D(f+g) &= D(f) + D(g) \\ D(k.f) &= k.D(f), \quad k \in \mathbb{R} \\ D(f.g) &= D(f).g_p + D(g).f_p \end{aligned}$$

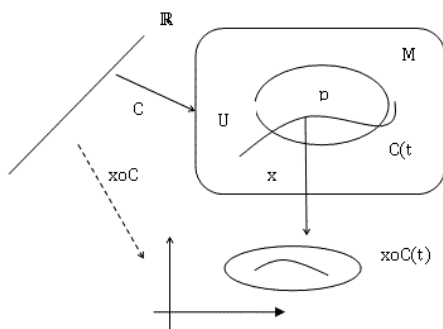
alors il existe un et un seul vecteur tangent v_p tel que $Df = v_p(f)$.

2. Cas d'une variété abstraite

Soit M une variété différentiable, $p \in M$ et \mathcal{C}_p l'ensemble des courbes $C :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ dont la trace passe par p . Soit (x, U) un système de coordonnées locales autour de $p = C(0)$. On définit la relation d'équivalence¹ sur \mathcal{C}_p

$$C_1 \sim C_2 \text{ ssi } \begin{aligned} C_1(0) &= C_2(0) = p \\ \frac{dx \circ C_1}{dt}(0) &= \frac{dx \circ C_2}{dt}(0) \end{aligned}$$

On note $[C_p]$ la classe d'équivalence définie par la courbe C et $T_p M$ l'espace quotient \mathcal{C}_p / \sim .



DÉFINITION 2.1. La classe d'équivalence $[C_p]$ est dite "vecteur tangent" au point p et $T_p M$ est dit "espace tangent" à M en p .

Nous allons voir que $T_p M$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel de dimension n sur \mathbb{R} ($n = \dim M$), ce qui n'est pas évident d'après cette définition. L'intérêt de cette définition est d'une part qu'elle est très naturelle (les vecteurs tangents sont vus comme les vecteurs vitesse de courbes)

¹On vérifie facilement que cette définition ne dépend pas du choix de la carte

et d'autre part elle permet une généralisation, la notion de "jet d'ordre k " (si l'on suppose dans la relation d'équivalence que $x \circ C_1$ et $x \circ C_2$ ont les mêmes dérivées en 0 jusqu'à l'ordre k inclus). Cependant elle n'est pas très maniable et il n'est pas évident par ailleurs que $T_p M$ soit un espace vectoriel de dimension n . C'est pourquoi nous allons construire une autre caractérisation des vecteurs tangents comme celle construite sur les vecteurs tangents à \mathbb{R}^n en p qui est plus algébrique.

DÉFINITION 2.2. Soit $\mathcal{C}^\infty(p)$ l'algèbre locale des germes de fonctions \mathcal{C}^∞ au point $p \in M$. On appelle dérivation en p toute application

$$\begin{aligned} X_p : \mathcal{C}^\infty(p) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longrightarrow X_p(f) \end{aligned}$$

telle que

$$\begin{cases} X_p(f+g) &= X_p(f) + X_p(g) \\ X_p(k.f) &= k.X_p(f), \quad k \in \mathbb{R} \\ X_p(f.g) &= X_p(f).g_p + X_p(g).f_p \end{cases}$$

On note $\mathcal{D}_p(M)$ l'ensemble des dérivations au point p

On a une application naturelle

$$\begin{aligned} \psi : T_p M &\longrightarrow \mathcal{D}_p(M) \\ [C]_p &\longrightarrow X_p \end{aligned}$$

où X_p est donné par

$$\begin{aligned} X_p : \mathcal{C}^\infty(p) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longrightarrow X_p(f) = \frac{d}{dt}(f \circ C)_0 \end{aligned}$$

On voit facilement que ψ ne dépend pas du choix de représentant. Cela est immédiat avec les notations ci-dessus

$$\frac{d}{dt}(f \circ C)_0 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_p \cdot \left(\frac{dC^i}{dt} \right)_0$$

où l'on voit que le résultat ne dépend que de $C(0) = p$ et de $\frac{dC^i}{dt}(0)$ c'est à dire de la classe d'équivalence de C . Nous allons voir qu'il s'agit d'une bijection.

PROPOSITION 2.1. L'espace $\mathcal{D}_p(M)$, muni des lois naturelles, est un espace vectoriel de dimension $n = \dim M$. De plus, si (x, U) est une carte au voisinage de p , alors

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p \right\}$$

est une base de $\mathcal{D}_p(M)$ où

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_p : \mathcal{C}^\infty(p) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_p := D_p(f \circ x^{-1})_{x(p)} \end{aligned}$$

Il est évident que $\mathcal{D}_p(M)$ est un espace vectoriel. Pour déterminer une base, on a besoin des lemmes suivants :

LEMME 2.1. *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, U étant un voisinage convexe de 0 dans \mathbb{R}^n telle que $f(0) = 0$, alors il existe des fonctions $g_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ telles que*

$$\begin{aligned} f(x^1, \dots, x^n) &= \sum_i x^i \cdot g_i(x^1, \dots, x^n) \\ \text{et} \\ g_i(0) &= (D_i f)_{(0)} \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Soit $h(t, x) = f(tx)$, on a

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial t}(t, x) dt = \int_0^1 \sum_i (D_i f)_{(tx)} \cdot x_i dt$$

et en posant $g_i(x) = \int_0^1 (D_i f)_{(tx)} dt$ on obtient le résultat. \square

LEMME 2.2. *Si (x, U) est une carte autour de p , alors $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \dots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_p\}$ est une carte de $\mathcal{D}_p(M)$*

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que si $X \in \mathcal{D}_p(M)$, on a $X(k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{R}$, car

$$X(1) = X(1.1) = X(1).1 + 1.X(1)$$

d'où $X(1) = 0$ et donc $X(k) = X(k.1) = kX(1) = 0$. Considérons maintenant le cas où $M = \mathbb{R}^n$ et $p = 0$. On a

$$\begin{aligned} X(f) &= X(f - f(0)) &= X(\sum_i x^i g_i) \\ &= \sum_i (X x^i) g_i(0) &+ x^i(0) X(g_i) \\ &= \sum_i (X(x^i)) (\frac{\partial f}{\partial x^i})_p \end{aligned}$$

et en posant $a_i = X(x^i)$ on obtient

$$X = \sum_i a_i (\frac{\partial}{\partial x^i})_p$$

Ceci montre que la famille $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_p\}$ est génératrice. D'autre part, si on a

$$a^1 (\frac{\partial}{\partial x^1})_p + \dots + a^n (\frac{\partial}{\partial x^n})_p = 0$$

en faisant agir successivement sur x^1, x^2, \dots, x^n on trouve $a^1 = 0, a^2 = 0, \dots, a^n = 0$. Il est facile maintenant de transférer le résultat de \mathbb{R}^n à M à l'aide d'une carte locale \square

PROPOSITION 2.2. *L'application*

$$\begin{aligned} \psi : T_p M &\longrightarrow \mathcal{D}_p(M) \\ [C]_p &\longrightarrow X_p \end{aligned}$$

définie ci dessus, est une bijection

DÉMONSTRATION. En effet, elle est surjective : Si $X_p = \sum a^i (\frac{\partial}{\partial x^i})_p$ on considère alors la courbe C telle que

$$\frac{d(x \circ C)}{dt} \Big|_{t=0} = (a^1, \dots, a^n) = \sum a^i e_i$$

(e_i) étant la base canonique de \mathbb{R}^n . On a évidemment $\psi([C]) = X_p$, car

$$\begin{aligned} X_p(f) &= \sum a^i (\frac{\partial f}{\partial x^i})_p \\ \text{et} \\ \psi([C])f &= \frac{d}{dt}(f \circ C) = \sum (\frac{\partial f}{\partial x^i})_p \cdot (\frac{dC^i}{dt})_0 \\ &= \sum a^i (\frac{\partial f}{\partial x^i})_p \end{aligned}$$

D'autre part, l'application ψ est injective : Si on a

$$\frac{d(f \circ C)}{dt} \Big|_0 = \frac{d(f \circ \Gamma)}{dt} \Big|_0, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(p)$$

où $p = C(0) = \Gamma(0)$ alors, en prenant pour f les fonctions coordonnées

$$x^i : (\text{voisinage de } p) \longrightarrow \mathbb{R}$$

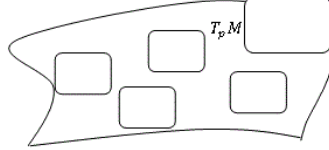
cela exprime que $(\frac{dC^i}{dt})_0 = (\frac{d\Gamma^i}{dt})_0$ c'est à dire $[C] = [\Gamma]$. □

3. Variété tangente

DÉFINITION 3.1. On appelle espace tangent au point $p \in M$ l'espace vectoriel $\mathcal{D}_p(M)$ des dérivations en p de $\mathcal{C}^\infty(p)$.

Par la suite l'espace tangent en p sera noté $T_p M$. On pose $TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M$, cet ensemble est muni d'une structure de variété de la manière

suivante :



Soit

$$\begin{aligned} \pi : TM &\longrightarrow M \\ X_p = (p, X) &\longrightarrow p \end{aligned}$$

Si (x, U) est une carte locale sur M , on considère la carte sur M , (ϕ, \bar{U}) avec, $\bar{U} = \pi^{-1}(U)$

$$\begin{aligned} \phi : \bar{U} &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} \\ X_q = \sum a^i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_q &\longrightarrow (x^1(q), \dots, x^n(q), a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

c'est à dire, les coordonnées d'un vecteur X_q sont les coordonnées de son origine et les composantes de X_q sur la $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_q \right\}$. On peut vérifier que la famille de telles cartes définit bien une structure de variété sur TM de dimension $2n$. Si M est C^k , TM est C^{k-1} . En effet, si (x, U) et (y, V) sont deux cartes de M et $(\phi, \bar{U}), (\psi, \bar{V})$ les cartes sur TM construites de la manière ci-dessus. Il s'agit de montrer que si $\bar{U} \cap \bar{V} \neq \emptyset$ alors ces deux cartes sont C^{k-1} -liées. On a $\pi(\bar{U}) = U, \pi(\bar{V}) = V, \pi(\bar{U} \cap \bar{V}) \subset \pi(\bar{U}) \cap \pi(\bar{V}) = U \cap V$ et donc

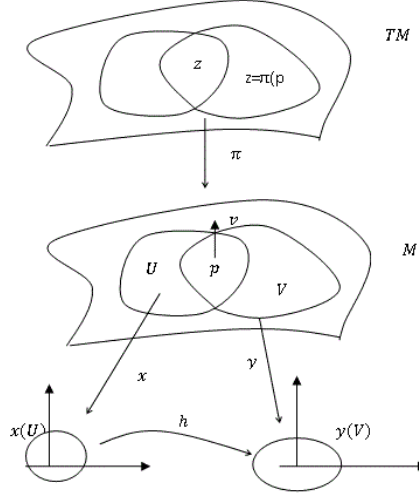
$$\bar{U} \cap \bar{V} \subset \pi^{-1}(U \cap V)$$

Soit $z \in \bar{U} \cap \bar{V}$ donc $z \in \pi^{-1}(U \cap V)$ et $z = \pi(p)$ avec $p \in U \cap V$. On a

$$\begin{aligned} \psi^{-1} \circ \phi : \phi(U \cap V) &\longrightarrow \psi(U \cap V) \\ (x^1(p), \dots, x^n(p), a^1, \dots, a^n) &\longrightarrow (y^1(p), \dots, y^n(p), b^1, \dots, b_n) \end{aligned}$$

où $y^i(p) = (y \circ x^{-1})^i(x(p)) = h(x(p))$, (en posant $h = y \circ x^{-1}$). Notons que h est un C^k difféomorphisme. Regardons maintenant comment se transforment

les composantes d'un vecteur.



Soit $v \in T_p M$, $v = \sum a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = \sum a^j \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_p$. On a

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = \sum \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_{x(p)} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_p$$

En effet,.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_p = D_i(f \circ x^{-1})_{x(p)} = D_i[(f \circ y^{-1})(y \circ x^{-1})]_{x(p)} = \sum_{j=1}^n (D_j(f \circ$$

$y^{-1}))_{(y \circ x^{-1})(x(p))} \cdot D_i(y \circ x^{-1})_{x(p)}$. Ainsi

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_p = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial y^j} \right)_p \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_{x(p)}$$

On a donc $\sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum b^j \frac{\partial}{\partial y^j}$ si et seulement si $\sum a^i \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_{x(p)} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_p = \sum b^j \frac{\partial}{\partial y^j}$ c'est à dire

$$b^j = \sum_i a^i \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_{x(p)} = \sum_i a^i D_i(y \circ x^{-1})_{x(p)}^j$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \psi \circ \phi : \phi(U \cap V) &\longrightarrow \psi(U \cap V) \\ (x^i(p), a^i) &\longrightarrow ((y \circ x^{-1})_{x(p)}^i, \sum_i a^i D_i(y \circ x^{-1})_{x(p)}^j) \end{aligned}$$

Il faudrait montrer maintenant que le changement de cartes est un C^{k-1} difféomorphisme, cela définira donc un atlas $\overline{\mathcal{A}}$ sur TM , dit atlas naturel associé à \mathcal{A} . Calculons la différentielle de cette application

$$D(\psi \circ \phi) = \left(\begin{array}{c|c} D_j(y \circ x^{-1})^i & 0 \\ \hline * & D_j(y \circ x^{-1})^i \end{array} \right)$$

donc $\det D(\psi \circ \phi) = \det \|D_j(y \circ x^{-1})\|^2 \neq 0$ ce qui montre que les changements de cartes sont des difféomorphismes. Noter que si $y \circ x^{-1}$ est un C^k alors $D_j(y \circ x^{-1})$ est un C^{k-1} , ce qui rend $\psi \circ \phi$ un C^{k-1} difféomorphisme. On a donc montré le théorème suivant

THÉORÈME 3.1. *Soit M une C^k - variété de dimension n munie d'un atlas \mathcal{A} et soit $\overline{\mathcal{A}}$ l'atlas naturel sur TM associé à \mathcal{A} . Alors, $\overline{\mathcal{A}}$ définit sur TM une structure de variété de classe C^{k-1} de dimension $2n$. De plus, si (x, U) et (y, V) sont deux cartes sur M telles que $U \cap V \neq \emptyset$, le changement de cartes sur TM est donné par*

$$(x^i(p), a^i) \longrightarrow ((y \circ x^{-1})^i_{x(p)}, \sum_i a^i D_i(y \circ x^{-1})^j_{x(p)})$$

ou avec les notations abrégées

$$(y^i(p), \sum_i a^i \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_p)$$

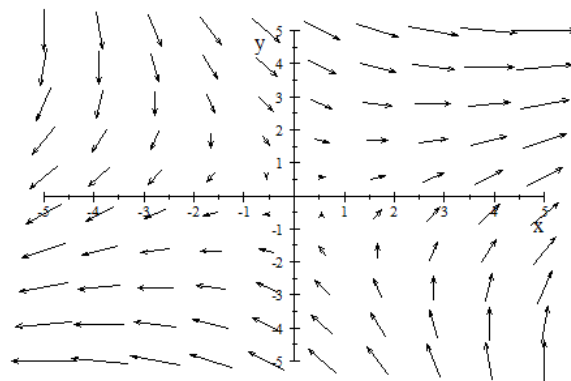
4. Champs de vecteurs

Soit M une variété de classe C^k , $k \geq 1$

DÉFINITION 4.1. *On appelle champ de vecteurs de classe C^r , $r \leq k$, une application C^r , X qui à tout point $p \in M$ associe un vecteur $X_p \in T_p M$. Il s'agit d'une application C^r*

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow TM = \bigsqcup_{q \in M} T_q M \\ p &\longrightarrow X_p \in T_p M \end{aligned}$$

telle que $\pi \circ X = id_M$. (on dit que X est une section de π où π est la surjection naturelle de TM sur M)



Notation : Les champs de vecteurs sont notés X, Y, Z, \dots . Leurs valeurs en p : X_p, Y_p, Z_p, \dots conformément aux notations employées pour les vecteurs tangents. L'ensemble des champs de vecteurs C^∞ sur M (si M est C^∞) est noté $\chi(M)$

$\chi(M)$ est muni naturellement d'une structure de $C^\infty(M)$ -module pour les lois :

$$\left\{ \begin{array}{l} X + Y : M \longrightarrow TM \\ \quad p \longrightarrow X_p + Y_p \\ \text{et} \\ fX : M \longrightarrow TM \\ \quad p \longrightarrow f(p)X_p \end{array} \right. \quad X, Y \in \chi(M), f \in C^\infty(M)$$

Les champs de vecteurs peuvent être vus comme dérivations de $C^\infty(M)$:

DÉFINITION 4.2. Soit A une \mathbb{k} -algèbre. On appelle *dérivation de A* , une application $D : A \longrightarrow A$ qui vérifie

- (1) $D(a + b) = D(a) + D(b)$
- (2) $D(ka) = kD(a)$
- (3) $D(ab) = aD(b) + bD(a)$

pour tous $a, b \in A, k \in \mathbb{k}$

PROPOSITION 4.1. Soit D une dérivation sur l'algèbre $C^\infty(M)$, $f \in C^\infty(M)$ et U un ouvert de M . Si $f|_U = 0$ alors $(Df)|_U = 0$

DÉMONSTRATION. En effet, soit $p \in U$, $K = \{p\}$ et ψ la fonction $\mathcal{C}^\infty(M)$ telle que $\psi(p) = 1$, $\text{Supp}\psi \subset U$. Notons $\phi = 1 - \psi$. On a $\phi(p) = 1$ et $\phi|_{U^c} = 1$ et $f = f \cdot \phi$. Il en vient que

$$Df = \phi Df + f D\phi$$

et en prenant la valeur en p

$$(Df)_p = \phi(p)(Df)_p + f(p)(D\phi)_p = 0$$

car $f(p) = \phi(p) = 0$ □

COROLLAIRE 4.1. Soient $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ telles que $f|_U = g|_U$ alors $(Df)|_U = (Dg)|_U$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer la proposition précédente à la fonction $f - g$. □

COROLLAIRE 4.2. Soit D une dérivation de $\mathcal{C}^\infty(M)$ et U un ouvert de M . Il existe alors un ouvert $U' \subset U$ et une unique dérivation $D_{U'}$ de $\mathcal{C}^\infty(U')$ telle que

$$(Df)|_{U'} = D_{U'}(f|_{U'}), \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

DÉMONSTRATION. Soit $U' \subset U$ tel que $f|_{U'} \in \mathcal{C}^\infty(U')$ peut être prolongée en une fonction $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(M)$. On pose ensuite

$$D_{U'} f|_{U'} = (D\tilde{f})|_{U'}$$

et d'après le corollaire 4.1 ceci ne dépend pas du choix du prolongement \tilde{f} . □

REMARQUE 4.1. Cette propriété s'exprime en disant que D est un opérateur local : Son action est déterminée par un opérateur $(D_{U'})$ qui agit sur les fonctions définies uniquement sur le voisinage U' .

PROPOSITION 4.2. Les champs de vecteurs peuvent être identifiés aux dérivations de $\mathcal{C}^\infty(M)$: Si $X \in \chi(M)$, on définit la dérivation notée aussi X par

$$\begin{aligned} X : \mathcal{C}^\infty(M) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \\ f &\longrightarrow X.f \end{aligned}$$

où $(X.f)_p = X_p.f$

DÉMONSTRATION. Il est facile de voir que X est une dérivation.

Reciproquement, si D est une dérivation de $\mathcal{C}^\infty(M)$, on définit le champ $X \in \chi(M)$ par

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow TM \\ p &\longrightarrow X_p \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} X_p : \mathcal{C}^\infty(p) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(p) \\ f &\longrightarrow (Df)_p \end{aligned}$$

avec \tilde{f} est un prolongement d'un représentant de f (sur un voisinage suffisamment petit de manière qu'il puisse être prolongé). \square

REMARQUE 4.2. *Il est clair que application*

$$D \longrightarrow X$$

est l'application réciproque de l'énoncé de la proposition. Ainsi donc par la suite on verra les champs de vecteurs $X \in \chi(M)$ comme les dérivations de $\mathcal{C}^\infty(M)$ c'est à dire des applications

$$X : \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

telles que

- (1) $X(f + g) = X(f) + X(g)$
- (2) $X(k.f) = kX(f)$
- (3) $X(f.g) = f.X(g) + g.X(f)$

Le corollaire 4.2 s'exprime en terme de champs de vecteurs

COROLLAIRE 4.3. *Soit $X \in \chi(M)$ et U un ouvert de M . Il existe alors un ouvert U' de M , $U' \subset U$ et un unique $X_{U'} \in \chi(U')$ tel que*

$$X_{U'}.f|_{U'} = (Xf)|_{U'}, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

Écriture Locale : La construction précédente permet d'effectuer les calculs en coordonnées locales. Si (x, U) est une carte de M autour de p , quitte à réduire U on définit un champ X_U sur U et on a

$$(X_U.f_U)_p = (X.f)_p = X_p.f = \sum a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p . f$$

où a^i sont les composantes de X_p sur la base $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right\}$:

$$X_p = \sum a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$$

En faisant varier p on aura en un point quelconque de U

$$X_U, f_U = \sum a^i(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) . f$$

où $\frac{\partial}{\partial x^i} \in \chi(U)$ est le champ

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x^i} : & U & \longrightarrow & TU \\ & p & \longrightarrow & \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \end{array}$$

c'est à dire $X_U = \sum a^i(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)$. On notera aussi

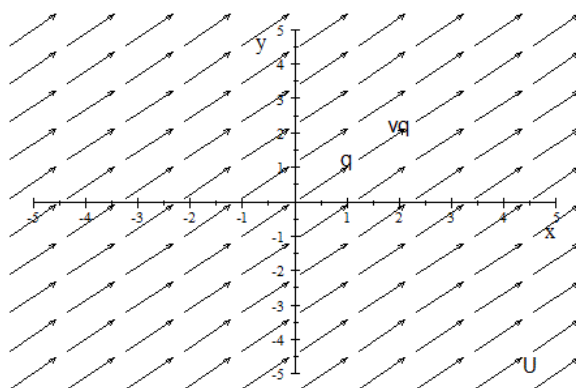
$$X = \sum_U a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

ou par abus de notation $X = \sum a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$.

PROPOSITION 4.3. Si $v \in T_p M$ alors il existe $X \in \chi(M)$ tel que $v = X_p$

DÉMONSTRATION. Soit (x, U) une carte locale autour de p et $v = \sum a^i (\frac{\partial}{\partial x^i})_p$. Définissons en tout point q de U

$$v_q = \sum a^i (\frac{\partial}{\partial x^i})_q$$



Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ telle que $f(p) = 1$ et $\text{Supp } f \subset U$. On définit en tout point $m \in M$

$$X_m = \begin{cases} f(m)v_m & \text{si } m \in U \\ 0 & \text{si } m \notin U \end{cases}$$

Il en vient que $X \in \chi(M)$ et $X_p = v$. □

4.1. Crochet de deux champs de vecteurs.

DÉFINITION 4.3. Soient $X, Y \in \chi(M)$, l'application

$$[X, Y] : \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

définie par

$$[X, Y].f = X.(Y.f) - Y.(X.f)$$

est une dérivation, donc elle définit un champ de vecteurs dit crochet de X et Y .

REMARQUE 4.3. Il est facile de vérifier que le crochet de deux champs de vecteurs est une dérivation, nous proposons de vérifier par exemple que

$$[X, Y](f.g) = ([X, Y].f).g + f.[X, Y].g$$

en effet,

$$\begin{aligned}
[X, Y](f.g) &= X(Y.(f.g)) - Y(X.(f.g)) \\
&= X((Y.f)g + (Y.g)f) - Y((X.f)g + (X.g)f) \\
&= X(Y.f).g + (Y.f)(X.g) + X(Y.g)f + (Y.g)(X.g) \\
&\quad - Y(X.f).g - (X.f)(Y.g) - Y(X.g)f - (X.g)(Y.f) \\
&= ([X, Y].f)g + f.[X, Y].g
\end{aligned}$$

On vérifie facilement les propriétés suivantes :

$$(1) [X, Y] = -[Y, X]$$

(2) Identité de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

$$(3) [X, fY] = X(f)Y + f[X, Y]$$

$$(4) [fX, gY] = fX(g)Y - gY(f)X + f.g[X, Y]$$

Expression du crochet en coordonnées locales :

Soit (x, U) une carte locale et soit les champs

$$X \stackrel{U}{=} \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y \stackrel{U}{=} \sum Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \text{ avec } X^i, Y^j \in \mathcal{C}^\infty(U)$$

On a, pour $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$

$$[X, Y].f = \sum_{i, j} \left\{ X^i \frac{\partial}{\partial x^i} (Y^j) \frac{\partial}{\partial x^j} f - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} (X^i) \frac{\partial}{\partial x^i} f + X^i Y^j \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right].f \right\}$$

en remarquant que $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$. On obtient

$$[X, Y] = \sum (X^i \frac{\partial}{\partial x^i} (Y^j) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} (X^i)) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

5. Application tangente

Soit $f : M \longrightarrow N$ une application différentiable de classe \mathcal{C}^1 , pour tout point $p \in M$, on définit une application linéaire

$$(f_*)_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} M$$

de la manière suivante : Soit $g \in \mathcal{C}^\infty(f(p))$, on définit $(f_*)_p X_p$ par son action sur g

$$(f_*)_p X_p.g := X_p(g \circ f)$$

On vérifie facilement que $(f_*)_p X_p$ est une dérivation de $\mathcal{C}^\infty(f(p))$ et que $(f_*)_p$ est linéaire. On définit aussi, point par point, une application

$$\begin{aligned}
f_* : TM &\longrightarrow TN \\
(p, X_p) &\longrightarrow (f(p), (f_*)_p X_p)
\end{aligned}$$

f_* est dite application tangente. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} TM & \xrightarrow{f_*} & TN & & \\ \pi_M \downarrow & & \downarrow & & \pi_N \\ M & \xrightarrow{f} & N & & \end{array}$$

PROPOSITION 5.1. Soient (x, U) et (y, V) deux cartes locales autour de $p \in M$ et $f(p) \in N$ respectivement. Alors la matrice de $(f_*)_p$ dans les bases $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\}$ de T_pM et $\{\frac{\partial}{\partial y^j}|_{f(p)}\}$ de $T_{f(p)}N$ est

$$M((f_*)_p, (\frac{\partial}{\partial x^i}|_p), (\frac{\partial}{\partial y^j}|_{f(p)})) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \Big|_p \right)$$

où $\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \Big|_p := D_j(y^i \circ f \circ x^{-1})_{x(p)}$. La matrice de f_* est la matrice jacobienne de l'expression de f en coordonnées locales.

DÉMONSTRATION. En effet, soit $g \in \mathcal{C}^\infty(f(p))$. On a

$$\begin{aligned} [(f_*)_p(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p)] \cdot g &= (\frac{\partial}{\partial x^i}|_p)(g \circ f) \\ &= \sum_j (\frac{\partial g}{\partial y^j}|_{f(p)}) (\frac{\partial f^j}{\partial x^i} \Big|_p) \\ &= \sum_j (\frac{\partial f^j}{\partial x^i} \Big|_p) (\frac{\partial}{\partial y^j}|_{f(p)}) \cdot g \end{aligned}$$

D'où

$$[(f_*)_p(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p)] = \sum_j (\frac{\partial f^j}{\partial x^i} \Big|_p) (\frac{\partial}{\partial y^j}|_{f(p)})$$

□

REMARQUE 5.1. Soient les applications différentiables entre variétés

$$\begin{array}{ccc} f : N & \longrightarrow & P \\ & \text{et} & \\ g : M & \longrightarrow & N \end{array}$$

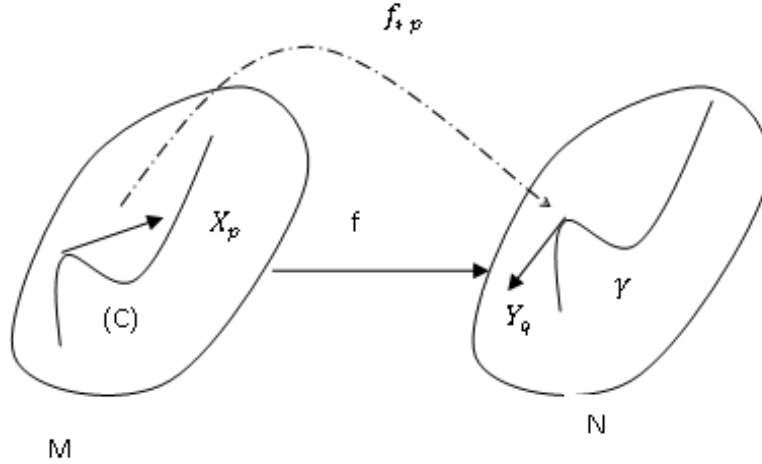
$x \in M$ et $(f \circ g)_* x : T_xM \longrightarrow T_{g(f(x))}P$ alors

$$(5.1) \quad f_* \circ g_* = (f \circ g)_*$$

Cette propriété qui traduit le fait que la jacobienne de la fonction composée est le produit des matrices jacobiniennes, se démontre immédiatement à l'aide de la définition : Soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty((f \circ g)_x)$. On a

$$\begin{aligned} ((f \circ g)_* x X_x) \phi &= X_x(\phi \circ f \circ g) \\ (f_*)_{g(x)} \circ (g_*)_x X_x \phi &= (g_*)_x X_x(\phi \circ f) \\ &= X_x(\phi \circ f \circ g) \end{aligned}$$

5.1. Interprétation géométrique de l'application tangente. On va vérifier dans ce paragraphe que si f envoie une courbe (C) passant par p de M , sur une courbe (γ) passant par $q = f(p)$ de N alors f_{*p} envoie tout vecteur tangent X_p à (C) à un vecteur tangent $Y_q = f_{*p} \cdot X_p$ à (γ) en q .



En effet, soit $X_p \in T_p M$ et soit (C) une courbe intégrale de X_p

$$(5.2) \quad \begin{cases} C(0) = p \\ C'(0) = X_p \end{cases}$$

On a $X_p(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ C)$. Le diagramme suivant nous montre le lien entre les différents espace

$$\begin{array}{ccc} TI & \xrightarrow{C_*} & TM \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ I & \xrightarrow{C} & M \end{array}$$

On obtient :

$$C_{*,0} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) (f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ C) = X_p(f)$$

et donc $C_{*,0} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) = X_p = C'(0)$. On en déduit d'après l'équation (5.1) que

$$\begin{aligned} f_{*p}(X_p) &= f_{*p} \left(C_{*,0} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) \right) \\ &= (f \circ C)_{*,0} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) \\ &= \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) (f \circ C) \end{aligned}$$

qui n'est autre que le vecteur tangent à $f(C)$ en q .

6. Exercices

EXERCICE 6.1. Soit la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow x^3 + xy + y^3 + 1 \end{aligned}$$

- (1) Déterminer l'application tangente en $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ associée à f
- (2) Soient $p_1(0, 0)$, $p_2(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ et $p_3(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$. En quels points p_1 , p_2 ou p_3 , f est-elle injective ? surjective ?

EXERCICE 6.2. Soit $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$, M muni de la structure différentielle id_M est une variété de dimension 2. Soit

$$X_{(x,y)} = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{(x,y)}$$

un élément de $T_{(x,y)}M$. On considère la première projection

$$\begin{aligned} f : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow t = f(x, y) = x \end{aligned}$$

- (1) Donner la matrice de l'application $f_*|_{(x,y)}$ dans les bases $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}_{(x,y)}$ et $\frac{d}{dt}|_t$ de $T_{(x,y)}M$ et $T_t\mathbb{R} = \mathbb{R}$ respectivement.
- (2) Dédurre $(f_*|_q)X_q$ pour $q = (1, 0)$
- (3) Vérifier que si $p, p' \in M$ tels que $f(p) = f(p')$ et $p \neq p'$ alors $f_*|_p(X_p) \neq f_*|_{p'}(X_{p'})$

EXERCICE 6.3. Trouver une expression générale du champs $X \in \chi(\mathbb{R}^2)$ si

- (1) $[\frac{\partial}{\partial x}, X] = X$ et $[\frac{\partial}{\partial y}, X] = X$
- (2) $[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, X]$

EXERCICE 6.4. On se donne les champs $X = xy \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial z}$ et $Y = y \frac{\partial}{\partial y}$ de \mathbb{R}^3 et soit l'application de classe C^∞

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longrightarrow t = x^2y \end{aligned}$$

Calculer :

- (1) $[X, Y]_{(1,1,0)}$
- (2) $(f.X)_{(1,1,0)}$
- (3) $(X.f)_{(1,1,0)}$
- (4) $(f_*|_{(1,1,0)})X_{(1,1,0)}$
- (5) $[X, f.Y]_{(1,1,0)}$

EXERCICE 6.5. On considère le champ $X = 2 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} + 3 \frac{\partial}{\partial z}$ sur \mathbb{R}^3 . Que devient X si on munit \mathbb{R}^3 de ses coordonnées cylindriques.

EXERCICE 6.6. Montrer que les champs X, Y, Z donnés par

$$\begin{aligned} X_p &= \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + t \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial t}\right)_p \\ Y_p &= \left(-z \frac{\partial}{\partial x} - t \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z} + y \frac{\partial}{\partial t}\right)_p \\ Z_p &= \left(-t \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} + x \frac{\partial}{\partial t}\right)_p \end{aligned}$$

où $p = (x, y, z) \in S^3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$, définissent une parallélisation de S^3 .

EXERCICE 6.7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T^2$ la paramétrisation $f(\theta, \theta') = (e^{i\theta}, e^{i\theta'})$

et soit X un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^2 . Sous quelles conditions le champs X , représente-t-il, relativement à f , un champ de vecteurs Y sur T^2 .

CHAPITRE 4

Linéarisation des champs de vecteurs

1. Introduction

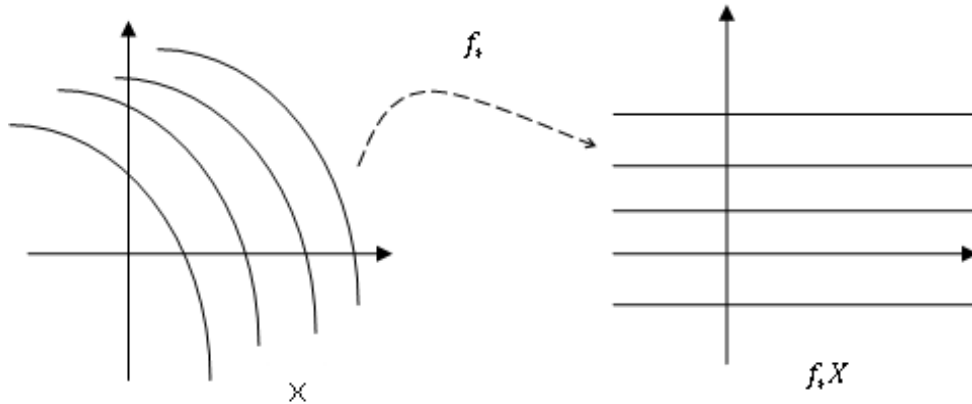
Toutes les notions dégagées dans le chapitre précédent, joueront un rôle important dans ce chapitre qui présente, essentiellement, l'interprétation géométrique du problème de Cauchy. Étant donné un système d'équations différentielles autonome du premier ordre sur une variété M , existe-t-il un système de coordonnées locales (x, U) dans lequel le système s'écrit :

$$x_1' = 1, x_2' = 0, \dots, x_n' = 0$$

et donc possède une solution affine de la forme

$$x_1 = t + a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n.$$

En d'autres termes, si X est un champ de vecteurs sur une variété M , existe-t-il un système de coordonnées locales dans lequel, les courbes intégrales sont une famille de droites parallèles.



Afin de répondre à toutes ces questions, un exposé détaillé est donné qui développe la notion du flot ainsi que les divers aspects du théorème de redressement d'un ou de plusieurs champs de vecteurs.

2. Problème de Cauchy, flot, groupe à un paramètre

Cas où $M = \mathbb{R}^n$:

On considère un système d'équations différentielles autonome du premier ordre sur un ouvert Δ de \mathbb{R}^n , résoluble par rapport aux dérivées :

$$(2.1) \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) &= X_1(x) \\ \vdots & \vdots \\ \dot{x}_n(t) &= X_n(x) \end{cases}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et

$$\begin{aligned} X : \Delta &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longrightarrow (X_1(x), \dots, X_n(x)) \end{aligned}$$

de classe C^1 . Le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme que (2.1) admet une et une seule solution maximale sur un intervalle I contenant 0, pour toute condition initiale $x_0 \in \Delta$, c'est à dire, $x = x(t)$ telle que $x(0) = x_0$.

Ce théorème affirme que si x^1 et x^2 sont deux solutions de (2.1) sur les intervalles I_1 et I_2 respectivement et qui passent par le même point, alors les deux solutions coïncident sur $I_1 \cap I_2$. En d'autres termes les solutions sont "parallèles" et ne peuvent pas s'intersecter. La signification de solution maximale est la suivante :

On note par S l'ensemble des solutions et par I_x l'intervalle de définition de la courbe $x(t) \in S$. On pose $I = \bigcup_{x(t) \in S} I_x$, c'est un intervalle ouvert. On

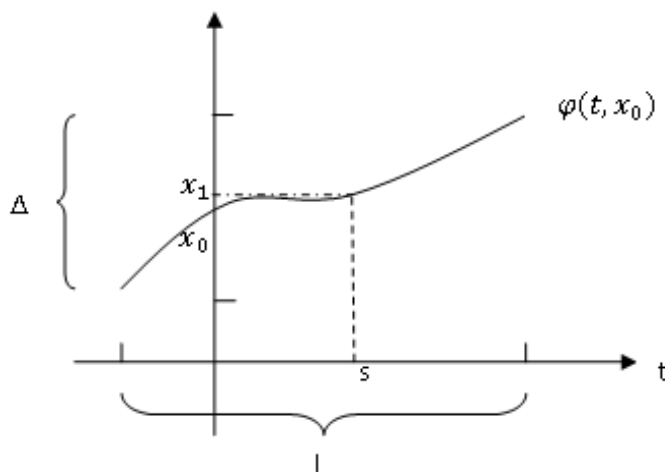
définit l'application

$$\phi : I \longrightarrow M$$

telle que $\phi(t) = x(t)$ où $x(t) \in S$ est choisie de sorte que $t \in I_x$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, ϕ est bien définie et il est clair que ϕ représente une solution du problème de Cauchy. Cette solution étant définie sur un plus grand ouvert, on l'appelle solution maximale.

On va noter par $\varphi(t, x_0)$ la solution de (2.1) telle que $\varphi(0, x_0) = x_0$, sur un intervalle I . Soit $s \in I$ et $x_1 = \varphi(s, x_0)$ un point de la courbe $\varphi(t, x_0)$. On repose le problème de Cauchy avec comme condition initiale x_1 , c'est à

dire il existe $\psi(t)$ solution de (2.1) telle que $\psi(0) = x_1$.



D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, φ et ψ doivent coïncider. Ainsi, ψ n'est autre au plus qu'un prolongement de la première solution. On exprime ceci par :

$$\begin{cases} \varphi(t, x_1) & = \varphi(t + s, x_0) \\ \varphi(t, \varphi(s, x_0)) & = \varphi(t + s, x_0) \end{cases}$$

Pour résumer ce qu'on vient de présenter, on cite le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1. *Soit $x'(t) = X(x)$ un système autonome où X est de classe C^k ($k \geq 1$) sur un ouvert $\Delta \subset \mathbb{R}^n$. Pour tout point x_1 de Δ , il existe $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de x_1 contenu dans Δ tel que pour tout point $x_0 \in U$, il existe une unique solution du système, $x = \varphi(t, x_0)$ telle que $\varphi(0) = x_0$ qui est définie pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, de plus $x = \varphi(t, x_0)$ est C^k sur $]-\varepsilon, \varepsilon[\times U$*

On peut transporter ce résultat sur les champs de vecteurs sur \mathbb{R}^n et lui donner une interprétation géométrique. On suppose que les objets mathématiques utilisés dans ce chapitre possède le minimum de régularité, par exemple on suppose que les champs sont de classe C^1 .

Il y a un dictionnaire entre les systèmes autonomes et les champs de vecteurs puisque tout champ X sur \mathbb{R}^n s'écrit :

$$X = \sum_{i=1}^n X^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

où les X^i sont C^1 sur \mathbb{R}^n . Ainsi à X on associe le système autonome :

$$(2.2) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} & = X_1(x) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} & = X_n(x) \end{cases}$$

Les solutions du système (2.2) ne sont autres que les courbes intégrales de X . Ainsi géométriquement, le problème de Cauchy s'écrit : pour tout point $x_0 \in U$ (ouvert de \mathbb{R}^n), X un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^n , il existe une courbe intégrale unique $\gamma(t)$ de X en x_0 . C'est-à-dire, une courbe γ telle que :

$$(2.3) \quad \begin{cases} \gamma(0) &= x_0 \\ \dot{\gamma}(0) &= X_{x_0} \end{cases}$$

THÉORÈME 2.2. (du flot local) Soient X un champ de vecteurs sur un ouvert Δ de \mathbb{R}^n , pour tout point x_0 de Δ il existe $\varepsilon > 0$ et U un voisinage ouvert de x_0 contenu dans Δ , il existe aussi une famille unique $\{\varphi_t\}_{-\varepsilon < t < \varepsilon}$ des fonctions :

$$\varphi_t : U \longrightarrow \varphi_t(U) \subset \Delta$$

et ayant les propriétés suivantes :

- (1) $\varphi :]-\varepsilon, \varepsilon[\times U \longrightarrow \Delta$
 $(t, x) \longrightarrow \varphi(t, x) = \varphi_t(x)$ est C^1
- (2) $\varphi_0 = id$ et $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ lorsque les deux membres sont définis
- (3) si $x \in U$, $X(x)$ est le vecteur vitesse de la courbe $t \rightarrow \varphi_t(x)$, c'est à dire

$$\left(\frac{d}{dt} \varphi_t(x) \right)_0 = X(x)$$

DÉFINITION 2.1. La famille $\{\varphi_t\}_{-\varepsilon < t < \varepsilon}$ ainsi définie dans le théorème précédent est dite "groupe locale à un paramètre" associé à X . L'application

$$\varphi :]-\varepsilon, \varepsilon[\times U \longrightarrow \Delta$$

est dite "flot" de X et si $x_0 \in U$ fixé, la courbe $t \rightarrow \varphi_t(x_0)$ est dite "orbite" de x_0 .

REMARQUE 2.1. Si $\varphi(t, x)$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, on dit que le groupe $\{\varphi_t\}$ est global et que X est un champ complet.

Cas où M est une variété quelconque :

THÉORÈME 2.3. Soit X un champ de vecteurs sur M , de classe C^k , $k \geq 1$. Pour tout point p de M , il existe un voisinage ouvert U contenant p , il existe $\varepsilon > 0$ ainsi qu'une unique famille de difféomorphismes $\{\varphi_t\}$, $|t| < \varepsilon$:

$$(2.4) \quad \varphi_t : U \longrightarrow \varphi_t(U) \subset M$$

qui vérifient les propriétés suivantes :

- (1) $\varphi :]-\varepsilon, \varepsilon[\times U \longrightarrow M$
 $(t, x) \longrightarrow \varphi(t, x) = \varphi_t(x)$ est C^k
- (2) $\varphi_0 = id$ et $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ lorsque les deux membres sont définis
 $(|t| < \varepsilon, |s| < \varepsilon, |t+s| < \varepsilon)$

(3) si $q \in U$, $X(q)$ est le vecteur vitesse de la courbe $t \rightarrow \varphi_t(q)$, c'est à dire

$$\left(\frac{d}{dt} \varphi_t(xq) \right)_{t=0} = X(q)$$

DÉMONSTRATION. Soit $p \in M$ et (x, U) un système de coordonnées locales autour de p . En restreignant, éventuellement, U , on peut supposer que $x(U)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n où on peut appliquer le théorème du flot local. Il existe un groupe local à un paramètre $\{\psi_t\}$ du champ X_U

$$(2.5) \quad \psi :]-\varepsilon, \varepsilon[\times x(U) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

En posant $\varphi_t = x^{-1} \circ \psi_t$, on obtient la famille de difféomorphismes locaux sur M . \square

3. Théorème de redressement d'un champ de vecteurs

Le théorème qu'on va démontrer peut être considéré le théorème fondamental de la théorie des équations différentielles. Il affirme qu'au voisinage de tout point non singulier par rapport à un champ de vecteurs ($X_p \neq 0$), on peut trouver un système de coordonnées locales (x, U) dans lequel X s'écrit $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$. C'est à dire que le système qui lui est associé devient :

$$x'_1 = 1, x'_2 = 0, \dots, x'_n = 0$$

DÉFINITION 3.1. Deux champs de vecteurs X et Y sur deux ouverts U et V de M sont dits équivalents, s'il existe un difféomorphisme

$$h : U \longrightarrow V$$

tel que $h_*X = Y$.

La signification géométrique de cette définition est la suivante : Soit $y \in V$ et $x = h^{-1}(y)$. Si φ_t et ψ_t sont les courbes intégrales de X et Y respectivement aux points x et y alors $h_*X = Y$ veut dire que $\frac{d}{dt}(h \circ \varphi_t \circ h^{-1}(y))_{t=0} = \frac{d}{dt}(\psi_t)_{t=0}$ et donc $h \circ \varphi_t \circ h^{-1} = \psi_t$. Ainsi, h échange les flots de X et Y

$$h \circ \varphi_t = \psi_t \circ h$$

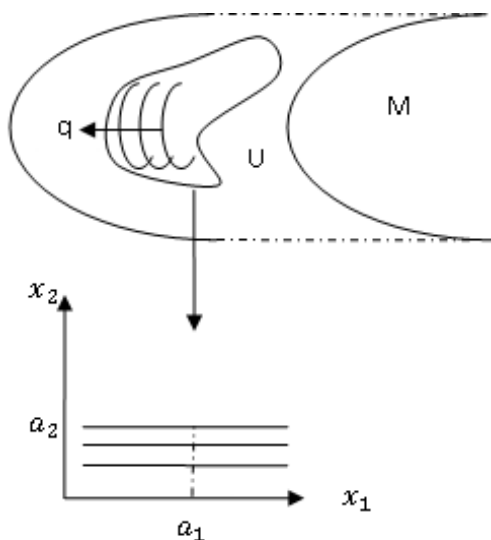
en d'autres termes, h envoie chaque orbite de X en x en l'orbite de Y qui passe par $y = h(x)$.

DÉFINITION 3.2. Un point x_0 de \mathbb{R}^n est dit point singulier de $X \in \chi(\mathbb{R}^n)$ si $X(x_0) = 0$.

DÉFINITION 3.3. Un champ X est dit linéaire si ses courbes intégrales sont des droites. Tout champ équivalent à un champ linéaire est dit linéarisable.

THÉORÈME 3.1. (**de redressement**) Tout champ de vecteurs X sur une variété M est linéarisable au voisinage d'un point régulier p de M

DÉMONSTRATION. Il s'agit de démontrer qu'il existe un système de coordonnées locales (x, U) autour de p tel que $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$.



Ceci veut dire que dans ce système de coordonnées locales le flot de X s'obtient en résolvant le système :

$$x'_1 = 1, x'_2 = 0, \dots, x'_n = 0$$

dont la solution est

$$\begin{cases} x_1 = t + a_1 \\ x_2 = a_2 \\ \vdots \\ x_n = a_n \end{cases}$$

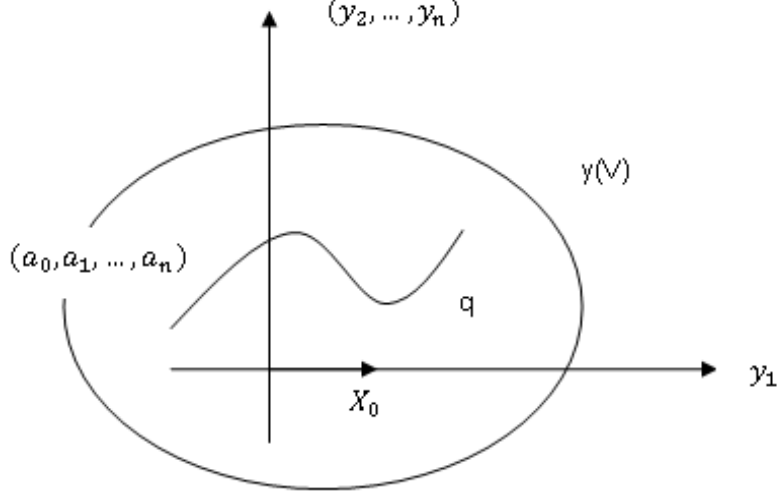
c'est l'orbite issue de (a_1, a_2, \dots, a_n) .

Choisissons d'abord une carte (y, V) autour de p telle que

$$\begin{cases} y(p) = 0 \\ X_0 = \frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_0 \end{cases}$$

L'idée de la construction des nouvelles coordonnées est la suivante : On considère le point $(0, a_2, \dots, a_n) \in y(V)$. Par ce point passe une unique courbe intégrale de X_V . Si q appartient à cette courbe intégrale, on prend comme nouvelles coordonnées de q les coordonnées (t, a_2, \dots, a_n) où t est l'intervalle de temps nécessaire pour aller le long de la courbe intégrale de

$(0, a_2, \dots, a_n)$ à q .



Plus précisément, on considère le flot φ_t du champ X_V et soit l'application

$$\begin{aligned} \bar{h} : y(V) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (a_1, \dots, a_n) &\longmapsto \varphi_{a_1}(0, a_2, \dots, a_n) \end{aligned}$$

On va montrer que $\bar{h}_*|_0 = Id$ en calculant le Jacobien $\left(\frac{\partial \bar{h}_i}{\partial y^j}\right)_0$. En effet, pour $j > 1$ on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{h}_i}{\partial y^j}\right)_0 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\bar{h}_i(0, \dots, \varepsilon, 0 \dots, 0) - \bar{h}_i(0)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi_0^i(0, \dots, \varepsilon, 0 \dots, 0) - \varphi_0^i(0)}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Or $\varphi_0 = Id$ donc $\varphi_0^i((0, \dots, \varepsilon, 0 \dots, 0)) = (0, \dots, \varepsilon, 0 \dots, 0)^i = \delta_j^i \cdot \varepsilon$. Ains pour $j > 1$ on a :

$$\left(\frac{\partial \bar{h}_i}{\partial y^j}\right)_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_j^i \cdot \varepsilon}{\varepsilon} = \delta_j^i$$

Pour $j = 1$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{h}_i}{\partial y^1}\right)_0 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\bar{h}_i(\varepsilon, 0 \dots, 0) - \bar{h}_i(0)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi_\varepsilon^i(0)}{\varepsilon} \\ &= \left[\frac{d}{dt} \varphi_t^i(0) \right]_{t=0} \\ &= (X^i)_0 = \delta_1^i \end{aligned}$$

D'où $(\bar{h}_*)_0 = Id$. En particulier \bar{h} est inversible au voisinage de 0. Il existe un voisinage U' de 0 avec $U' \subset y(V)$ sur lequel \bar{h} est inversible et donc un

difféomorphisme. Soit W un voisinage de 0 dans $y(V)$ tel que

$$h = (\bar{h}/U)^{-1} : W \longrightarrow U'$$

est bien définie. Calculons h_*X : Pour tout $b \in W$ on a

$$\begin{aligned} (h_*X)_b &= \left[\frac{d}{dt} (h \circ \varphi_t \circ h^{-1})_b \right]_{t=0} \\ &= \left[\frac{d}{dt} (h \circ \varphi_t \circ \bar{h})_{(b_1, \dots, b_n)} \right]_{t=0} \\ &= \left[\frac{d}{dt} (h \circ \varphi_t \circ \varphi_{b_1})_{(0, b_2, \dots, b_n)} \right]_{t=0} \\ &= \left[\frac{d}{dt} (h \circ \bar{h})_{(t+b_1, b_2, \dots, b_n)} \right]_{t=0} \\ &= \left[\frac{d}{dt} (t + b_1, b_2, \dots, b_n) \right]_{t=0} \\ &= (1, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

ce qui montre que si l'on prend comme nouveau système de coordonnées locales (x, U) où $U = y^{-1}(W)$ et $x = h \circ y$, le champ X deviendra $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$. \square

4. Exercices

EXERCICE 4.1. Soit $X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ sur $\Delta = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Trouver le groupe local à un paramètre associé à X et déterminer géométriquement l'orbite de (x, y) pour tout $(x, y) \in \Delta$.

EXERCICE 4.2. Soit $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ sur $\Delta = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Trouver le flot et les orbites de X .

EXERCICE 4.3. Soit $X = e^{-x} \frac{\partial}{\partial x}$ sur \mathbb{R}^2 . Trouver le groupe à un paramètre de X ? Vérifier s'il s'agit d'un groupe global ?

EXERCICE 4.4. Vérifier si chacun des champs suivants

$$X = y \frac{\partial}{\partial x}, Y = \frac{x^2}{2} \frac{\partial}{\partial y}, [X, Y]$$

où $X, Y \in \chi(\mathbb{R}^2)$, est un champ complet. Conclure.

EXERCICE 4.5. Soient $X, Y \in \chi(M)$. Interpréter géométriquement (relativement aux flots de X et Y), le fait que X, Y commutent, c'est à dire $[X, Y] = 0$.

EXERCICE 4.6. Soit

$$\begin{aligned} \theta \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, x, y) &\rightarrow (x + t, y) \end{aligned}$$

(1) Montrer que θ est un groupe à un paramètre

(2) Trouver $X \in \chi(\mathbb{R}^2)$ dont le flot est $\theta_{(x,y)}(t)$

Connexions linéaires sur les variétés

1. Introduction

On considère M une variété de dimension n . Soit m un point de M , on note $T_m M$ l'espace tangent à M en m , si (x, U) est une carte autour de m alors $T_m M$ est un espace vectoriel engendré par $\{\partial x_i\}_{1 \leq i \leq n}$. On note TM la variété tangente donnée par la réunion ensembliste :

$$TM = \cup_{m \in M} T_m M.$$

Un élément $\xi \in TM$ est un vecteur tangent ξ à M en un certain point m . On appelle champ de vecteurs sur M toute application.

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow TM \\ p &\longrightarrow X_p \in T_p M. \end{aligned}$$

On note par $\chi(M)$ le $C^\infty(M)$ module des champs de vecteurs sur M ou l'ensemble des sections sur M . Notons que $\chi(M)$ est engendré par $\{\partial x_i\}$.

L'objectif de ce chapitre est de définir une notion de dérivée d'un champ Y par rapport à un vecteur $X_p \in T_p M$ (c'est à dire la dérivée de Y le long d'une "courbe intégrale" de X_p). On voit que cela tient à la possibilité de définir un "transport parallèle" des vecteurs.

Dans un premier cas, on considère $M = \mathbb{R}^n$, on peut donc définir la dérivée d'un champ de vecteurs le long d'une courbe en un point p de la manière suivante :

DÉFINITION 1.1. Soient Y un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^n , $Y \in \chi(\mathbb{R}^n)$, et (c) une courbe différentiable telle que $c(0) = p$. On appelle dérivée de Y en p le long de (c) :

$$\text{dérivée de } Y \text{ le long de } (c) \text{ en } p := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Yc(h) - Yc(0)}{h}.$$

On remarque que ceci n'est autre que la dérivée de $Y \circ c$:

$$(1.1) \quad D(Y \circ c)_{(t=0)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x^k} \right)_{c(0)} \left(\frac{dc^k}{dt} \right)_{t=0}.$$

Si on pose $X^k = \left(\frac{dc^k}{dt}\right)_{t=0}$ et on prend X_p un vecteur de \mathbb{R}^n en p et (c) une courbe intégrale de X_p , définie par :

$$\begin{cases} c(0) &= p \\ \frac{dc}{dt}(0) &= X_p. \end{cases}$$

La dérivée de Y le long de (c) en p se note :

$$(1.2) \quad D_{X_p}Y = \sum X^k \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^k}\right)_{c(0)} \partial x_i.$$

REMARQUE 1.1. *Il est clair que $D_{X_p}Y$ ne dépend pas de (c) mais de $\frac{dc}{dt}(0)$.*

EXEMPLE 1.1. *Dans \mathbb{R}^3*

Soit la courbe (c) d'équations paramétriques $(c) = (t, t^2, t^2 + 1)$ et soit le point $p = c(0) = (0, 0, 1)$. Soit Y le champ de vecteurs, $Y \in \chi(\mathbb{R}^3)$, tel que $Y = 2xy\partial x + (x+z)\partial z$. On propose de calculer $D_{X_p}Y$.

En effet, on a :

$$X^k = \left(\frac{dc}{dt}\right)_{t=0} = (1, 2t, 2t) = (1, 0, 0).$$

Alors, en appliquant la formule (1.2) précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} D_{X_p}Y &= \sum_k X^k \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^k}\right)_{c(0)} \partial x_i \\ &= \left(X^k \left(\frac{\partial Y_1}{\partial x^k}\right)_{c(0)}, X^k \left(\frac{\partial Y_2}{\partial x^k}\right)_{c(0)}, X^k \left(\frac{\partial Y_3}{\partial x^k}\right)_{c(0)}\right) \\ &= (2y, 0, 1)_{t=0} \\ &= (0, 0, 1) \\ &= \partial z)_{(0,0,1)} \end{aligned}$$

:/Users/USER/AppData/Local/Temp/graphics/swp0000_28.pdf

EXEMPLE 1.2. *Dans \mathbb{R}^2 .*

Soit la courbe (c) d'équations paramétriques $(c) = (\cos t, \sin t)$ et soit le point $p = c(0) = (1, 0)$. Soit Y le champ de vecteurs, $Y \in \chi(\mathbb{R}^2)$, donné par $Y = x\partial x + y\partial y$. On propose de calculer $D_{X_p}Y$.

En effet, on a que :

$$X^k = \left(\frac{dc}{dt}\right)_{t=0} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Alors, en appliquant la formule (1.2) précédente on obtient :

$$\begin{aligned}
 D_{X_p} Y &= \sum_k X^k \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^k} \right)_{c(0)} \partial x_i \\
 &= \left(X^k \left(\frac{\partial Y^1}{\partial x^k} \right)_{c(0)}, X^k \left(\frac{\partial Y^2}{\partial x^k} \right)_{c(0)} \right) \\
 &= (-\sin t, \cos t) \\
 &= -\sin t \partial x + \cos t \partial y)_p \\
 &= \partial y)_p
 \end{aligned}$$

REMARQUE 1.2. Dans cette formule, on a fait un abus de notations : en effet, le vecteur $Yc(h) \in T_{c(h)}\mathbb{R}^n$ alors $Yc(0) \in T_{c(0)}\mathbb{R}^n$. Donc, on ne peut pas faire la différence de ces deux vecteurs car ils appartiennent à des espaces différents. En fait, on "transporte parallèlement" $Yc(h)$ en p , c'est à dire on considère le vecteur $\tau_p Yc(h) \in T_p\mathbb{R}^n$ qui a les mêmes composantes que $Yc(h)$. Alors, On doit poser :

$$D_{X_p} Y = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tau_p Yc(h) - Yc(0)}{h}.$$

Or sur une variété quelconque cette opération n'a plus de sens, car il n'existe ni un système de coordonnées global et canonique, ni la notion des "vecteurs ayant les les mêmes composantes" en des points distincts. Dans \mathbb{R}^n , le transport parallèle peut être défini ainsi :

DÉFINITION 1.2. Pour tout champ de vecteurs $Y \in \chi(\mathbb{R}^n)$, Y est parallèle si ses composantes Y^i sont constantes.

EXEMPLE 1.3. On considère le champ de vecteurs $X = \frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y}$. Les composantes de X sont constantes alors X est parallèle, comme le montre la figure suivante :

:/Users/USER/AppData/Local/Temp/graphics/swp0000_29.pdf

2. Connexions linéaires

On définit maintenant les différents axiomes d'une connexion linéaire D sur l'espace vectoriel \mathbb{R}^n , qui seront généralisés sur une variété quelconque.

DÉFINITION 2.1. Soient X et Y deux champs de vecteurs, tels que X et $Y \in \chi(\mathbb{R}^n)$. Une **connexion linéaire** de \mathbb{R}^n est définie par :

$$\begin{aligned}
 D : \chi(\mathbb{R}^n) \times \chi(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \chi(\mathbb{R}^n) \\
 (X, Y) &\longrightarrow D_X Y.
 \end{aligned}$$

On définit $D_X Y \in \chi(\mathbb{R}^n)$ par :

$$\begin{aligned}
 D_X Y : \chi(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow T\mathbb{R}^n \\
 p &\longrightarrow (D_X Y)_p := D_{X_p} Y.
 \end{aligned}$$

Il est évident que D vérifie les propriétés suivantes :

1. $D_{X+Y}Z = D_XZ + D_YZ,$
2. $D_X(Y + Z) = D_XY + D_XZ,$
3. $D_{fX}Y = fD_XY, \forall X, Y \in \chi(M),$
4. $D_X(fY) = D_X(fY), \forall f \in C^\infty(M).$

Soit M maintenant une variété différentiable. On pose la définition suivante :

DÉFINITION 2.2. On appelle *connexion linéaire sur M* une application D qui à tout couple de champs de vecteurs X et $Y \in \chi(M)$ associe un champ noté D_XY qui satisfait les propriétés suivantes :

1. $D_{X+Y}Z = D_XZ + D_YZ,$
2. $D_X(Y + Z) = D_XY + D_XZ,$
3. $D_{fX}Y = fD_XY, \forall X, Y \in \chi(M),$
4. $D_X(fY) = D_X(fY), \forall f \in C^\infty(M).$

L'opérateur D est dit **opérateur de dérivation covariante**.

PROPOSITION 2.1. Soient X et Y deux champs de vecteurs, X et $Y \in \chi(M)$ et U un voisinage de M . Alors la restriction du champ D_XY sur le voisinage U ne dépend que de la restriction de X et Y sur U .

DÉMONSTRATION. En effet, on montre que si,

$$X|_U = X'|_U$$

alors

$$(D_XY)|_U = (D_{X'}Y)|_U.$$

Pour cela, il suffit de montrer que si $Z|_U = 0$, alors $(D_ZY)|_U = 0$ et on pose $Z = X - X'$. Soit $x_0 \in U$ et f une fonction C^∞ telle que $f(x_0) = 0$ et $f|_{CU} = 1$. On a $fZ = Z$. Par suite, on obtient :

$$\begin{aligned} D_ZY &= (D_{fZ}Y)_{x_0} \\ &= f(x_0) \cdot (D_ZY) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De même, on montre que si $Z|_U = 0$, alors $(D_XZ)|_U = 0$. En prenant la même fonction f que ci-dessus ($fZ = Z$), on trouve :

$$\begin{aligned} D_XZ)_{x_0} &= (D_X(fZ))_{x_0} \\ &= (Xf)_{x_0} \cdot Z_{x_0} + f(x_0) \cdot (D_XZ)_{x_0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Cette dernière proposition permet donc d'introduire la conclusion suivante :

Conclusion On remarque que $(D_X Y)_p$ ne dépend que de la valeur de X en p . Par suite, on pose :

$$(D_X Y)_p := D_{X_p} Y,$$

où X est un champ quelconque qui prolonge X_p .

3. Expressions en coordonnées locales

Soit (x, U) un système de coordonnées locales autour de p . On pose :

$$D_{\partial x_i} \partial x_j = \Gamma_{ij}^k \cdot \partial x_k,$$

où $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$ sont dits les **coefficients de Christoffel**.

Soit $X = X^i \partial x_i$ et $Y = Y^j \partial x_j$, où on ne se sert plus du symbole \sum désignant la somme :

$$\begin{aligned} D_X Y &= D_{X^i \partial x_i} (Y^j \partial x_j) \\ &= X^i (D_{\partial x_i} (Y^j \partial x_j)) \\ &= X^i D_{\partial x_i} (Y^j \partial x_j) \\ &= (X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x_i} \partial x_j + \Gamma_{ij}^k X^i Y^j \partial x_k). \end{aligned}$$

D'où,

$$D_X Y = (X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x_i} + \Gamma_{ij}^k X^i Y^j) \partial x_k.$$

REMARQUE 3.1. Si $M = \mathbb{R}^n$, la connexion ayant les coefficients $\Gamma_{ij}^k = 0$ est dite connexion canonique.

4. Interprétation géométrique

Soit $c :]a, b[\rightarrow M$ une courbe différentiable sur M . On appelle champ de vecteurs le long de (c) , est l'application V qui à tout point $t \in]a, b[$ associe un élément $V_t \in T_{c(t)}M$. Ceci est plus général que la restriction d'un champ de vecteurs de M à $c(t)$.

Si (x, U) un système de coordonnées locales autour d'un point de c , ceci nous permet d'écrire :

$$V_t = \sum_i v^i(t) (\partial x_i)_{c(t)}.$$

On dit que V est C^∞ si l'application :

$$t \rightarrow V_t f$$

est C^∞ , pour tout $f \in C^\infty(M)$, ce qui revient à dire que les $v^i(t)$ sont C^∞ .

Un champ de vecteurs particulier de c est le champ vitesse c' défini par :

$$c' = \frac{dc^i}{dt} (\partial x^i)_{c(t)}$$

où c^i est la $i^{\text{ème}}$ composante de $x \circ c$. Si une connexion est donnée, on pourra définir la dérivée covariante de champ le long de c de la manière suivante :

PROPOSITION 4.1. *Soit D une connexion et $c:]a, b[\longrightarrow M$ une courbe C^∞ . Il existe alors une et une seule application*

$$D_{c'} : \begin{array}{ccc} \chi(c) & \longrightarrow & \chi(c) \\ V & \longrightarrow & D_{c'}V, \end{array}$$

telle que :

- (1) Si V est la restriction d'un champ $\tilde{V} \in \chi(M)$ à $c(t)$ (c'est à dire $V = \tilde{V}|_{c(t)}$), alors $D_{c'}V = D_{c'(t)}\tilde{V}$,
- (2) $D_{c'}(V + W) = D_{c'}V + D_{c'}W$,
- (3) $D_{c'}(fV) = \frac{df}{dt}V + fD_{c'}V$, pour $f \in C^\infty(]a, b[)$.

DÉMONSTRATION. Soit : $p \in c(t)$ et (x, U) un système de coordonnées locales autour de p et soit :

$$V = v^i(t)(\partial x_i)_{c(t)}$$

On a :

$$\begin{aligned} D_{c'}V &= D_{c'}(\sum_i v^i(t)(\partial x_i)_{c(t)}) \\ &= \sum_i (\frac{dv^i}{dt}(\partial x_i)_{c(t)} + v^i(t) D_{c'}(\partial x_i)_{c(t)}) \\ &= \sum_i ((\frac{dv^i}{dt}(\partial x_i)_{c(t)} + v^i(t)D_{c'(t)}(\partial x_i)_{c(t)}) \\ &= \frac{dv^i}{dt}(\partial x_i)_{c(t)} + v^i(t) \frac{dc^i}{dt} (D_{\partial x^j} \partial x_i)_{c(t)}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$D_{c'}V = (\frac{dv^k}{dt} + \Gamma_{ji}^k(c(t)) \frac{dc^i}{dt} \cdot v^i(t)) \cdot (\partial x^k)_{c(t)}.$$

Ceci implique que $D_{c'}V$ est parfaitement déterminée par la connexion.

Réciproquement, pour montrer l'existence, on définit $D_{c'}V$ par cette formule et on montre que cette définition est indépendante du choix des coordonnées et satisfait aux axiomes (1),(2) et (3). \square

REMARQUE 4.1. *Si $M = \mathbb{R}^n$ et D est la connexion canonique ($\Gamma_{ij}^k = 0$), alors on a :*

$$D_{c'}V = \frac{dv^k}{dt}(\partial x^k)_{c(t)}.$$

C'est à dire si $V = (v^1(t), v^2(t), \dots, v^n(t))$, alors on a :

$$D_{c'}V = (\frac{dv^1(t)}{dt}, \frac{dv^2(t)}{dt}, \dots, \frac{dv^n(t)}{dt}).$$

DÉFINITION 4.1. *Un champ de vecteurs $V \in \chi(c)$ est dit parallèle pour une connexion linéaire D si $D_{c'}V = 0$.*

Dans la cas où $M = \mathbb{R}^n$ (munie de la connexion canonique), cela signifie que les composantes de V sont constantes, ce qui justifie la terminologie.

Dans le cas d'une variété quelconque M , soit (c) une courbe régulière. Donc un vecteur $V \in \chi(c)$ est dit parallèle le long de (c) si et seulement si :

$$(4.1) \quad \begin{cases} \frac{dv^1(t)}{dt} + v^i(t) \frac{dc^j}{dt} \Gamma_{ij}^1 & = 0, \\ \frac{dv^2(t)}{dt} + v^i(t) \frac{dc^j}{dt} \Gamma_{ij}^2 & = 0, \\ \vdots & \vdots \\ \frac{dv^n(t)}{dt} + v^i(t) \frac{dc^j}{dt} \Gamma_{ij}^n & = 0. \end{cases}$$

Les composantes de V sont donc une solution d'un système différentiel linéaire de degré 1 à n équations.

PROPOSITION 4.2. *Soit M une variété munie d'une connexion et (c) une courbe différentiable sur M . Soit $V_a \in T_{c(a)}M$, Il existe alors un et un seul champ de vecteurs $V \in \chi(c)$ parallèle le long de c qui prolonge V_a .*

DÉMONSTRATION. Le champ V doit vérifier le système précédent donné par :

$$\frac{dv^k}{dt} + \Gamma_{ji}^k(c(t)) \frac{dc^i}{dt} \cdot v^i(t) = 0.$$

il s'agit d'un système différentiel linéaire à coefficients de classe C^1 . Par conséquent, la solution existe sur tout intervalle $[a, b]$ et en appliquant le théorème de Cauchy-Schwartz au système (s) cité ci-dessus, elle est unique pour la condition initiale $(V)_{t=a} = V_a$. \square

REMARQUE 4.2. *D'après la figure précédente, la notion de vecteurs parallèles n'est plus la notion classique. Il s'agit alors de vecteurs parallèles relativement à une connexion.*

REMARQUE 4.3. *Dans cet exemple, on remarque que la notion de vecteurs parallèles relativement à ∇ rejoint la définition classique de vecteurs parallèles.*

REMARQUE 4.4. *Soit M munie d'une connexion et soit $V_p \in T_pM$, un vecteur tangent. Soit γ une courbe passant par le point p . Il existe alors un et un seul champs de vecteurs $V \in \chi(\gamma)$, parallèle prolongeant V_p . Ainsi pour $V_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}$ tel que $V_{\gamma(t)} = V(\gamma(t))$, $V_{\gamma(t)}$ est dit le transport parallèle de V_p le long de γ entre p et $\gamma(t)$. On définit alors un isomorphisme d'espaces vectoriels :*

$$\tau_\gamma)_t^a : \begin{array}{ccc} T_{\gamma(a)} & \longrightarrow & T_{\gamma(t)} \\ V_a & \longrightarrow & V_{\gamma(t)}. \end{array}$$

PROPOSITION 4.3. *La donnée d'une connexion permet de définir, pour toute courbe (c) un isomorphisme*

$$\tau_c)_t^a : \begin{array}{ccc} T_{c(a)}M & \longrightarrow & T_{c(t)}M \\ V_a & \longrightarrow & V_{c(t)}. \end{array}$$

qui est dit transport parallèle le long de c.

La proposition suivante permet d'exprimer la dérivée covariante à l'aide du transport parallèle, formant ainsi une interprétation géométrique de la notion de connexion.

On a en effet :

PROPOSITION 4.4. *Soit M munie d'une connexion D, X et Y deux champs de vecteurs, X et Y ∈ χ(M), et soit (c) une courbe intégrale de X sur M c'est à dire*

$$\begin{cases} c(0) & = & p, \\ c'(0) & = & X_p. \end{cases}$$

Alors

$$D_{X_p}Y = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tau_c)_0^h Y c(h) - Y_{c(0)}}{h}.$$

DÉMONSTRATION. Soit

$$Z_t = \tau_c)_t^h Y c(h)$$

Notons que

$$Z_h = Y c(h).$$

On a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\tau_c)_0^h Y c(h) - Y_p}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Z_0^k - Y_{c(0)}^k}{h}$$

Or d'après le théorème des accroissements finis, il existe un $\tau_k \in]0, h[$ tel que

$$Z_h^k = Z_0^k + h \left(\frac{dZ^k}{dt} \right) \tau_k$$

Donc,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{(\tau_c)_0^h Y c(h) - Y_{c(0)}}{h} \right]^{(k)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{Z_h^k - h \left(\frac{dZ^k}{dt} \right) \tau_k - Y_{c(0)}^k}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{Z_h^k - Y_{c(0)}^k}{h} \right) - \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{dZ^k}{dt} \right) \tau_k \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{Y_{c(h)}^k - Y_{c(0)}^k}{h} \right) - \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{dZ^k}{dt} \right) \tau_k \\ &= \left(\frac{dY^k}{dt} \right)_{c(0)} - \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{dZ^k}{dt} \right) \tau_k \end{aligned}$$

Or,

$$\left(\frac{dZ^k}{dt}\right)\tau_k + \Gamma_{ij}^k(c(\tau_k))\frac{dt^i}{dt}(\tau_k)Z^j(\tau_k) = 0$$

(car Z est parallèle le long de c);

Donc,

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{dZ^k}{dt}\right)\tau_k &= -\Gamma_{ij}^k(c(0))\left(\frac{dt^i}{dt}\right)_{(0)}Z_0^j(0) \\ &= -\Gamma_{ij}^k(c(0))\left(\frac{dt^i}{dt}\right)_{(0)}Y^j(c(0))\end{aligned}$$

Et par conséquent,

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{(\tau_c)_0^h Y c(h) - Y c(0)}{h} \right]^{(k)} &= \left(\frac{dY^k}{dt}\right)_{c(0)} + \Gamma_{ij}^k(c(0))\left(\frac{dt^i}{dt}\right)_{(0)}Y^j(c(0)) \\ &= (D_{X_p} Y)^{(k)}\end{aligned}$$

□

REMARQUE 4.5. *Soit*

$$\begin{aligned}f :]0, \varepsilon[&\longrightarrow T_p M \\ h &\longrightarrow (\tau_c)_0^h Y c(h)\end{aligned}$$

Alors, $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = D_{X_p} Y$.

5. Torsion et Courbure

DÉFINITION 5.1. *On appelle torsion de la connexion linéaire D le tenseur $T \in \otimes_2^1(M)$ c'est à dire*

$$T : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

est $C^\infty(M)$ bilinéaire, défini par

$$T(X, Y) := D_X Y - D_Y X - [X, Y].$$

DÉFINITION 5.2. *On appelle courbure de la connexion linéaire D le tenseur $R \in \otimes_3^1(M)$ c'est à dire*

$$R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

est $C^\infty(M)$ multilinéaire, défini par

$$R(X, Y)Z := D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]}Z.$$

REMARQUE 5.1. *D'après la définition-même, on a les propriétés de l'antisymétrie :*

$$T(X, Y) = -T(Y, X) \text{ et } R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z.$$

Par conséquent, pour avoir l'expression en coordonnées locales, il suffit de calculer $T(\partial x_i, \partial x_j)$ et $R(\partial x_i, \partial x_j)\partial x_k$, tel que $i \neq j$.

PROPOSITION 5.1. *Soit (x, U) un système de coordonnées locale. On a :*

$$(1) \quad T(\partial x_i, \partial x_j) = (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k)\partial x_k$$

$$(2) \quad R(\partial x_i, \partial x_j)\partial x_k = \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^h}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial x_j} + \Gamma_{il}^h \cdot \Gamma_{jk}^l - \Gamma_{jl}^h \cdot \Gamma_{ik}^l \right) \partial x_h$$

DÉMONSTRATION. $T(\partial x_i, \partial x_j) = D_{\partial x_i} \partial x_j - D_{\partial x_j} \partial x_i - [\partial x_i, \partial x_j]$
On fera la démonstration de la deuxième proposition :

$$R(\partial x_i, \partial x_j)\partial x_k = D_{\partial x_i} D_{\partial x_j} \partial x_k - D_{\partial x_j} D_{\partial x_i} \partial x_k - D_{[\partial x_i, \partial x_j]} \partial x_k$$

Comme $[\partial x_i, \partial x_j] = 0$ alors

$$\begin{aligned} R(\partial x_i, \partial x_j)\partial x_k &= D_{\partial x_i} (\Gamma_{ik}^l D_{\partial x_l}) - D_{\partial x_j} (\Gamma_{ik}^l D_{\partial x_l}) \\ &= D_{\partial x_i} (\Gamma_{jk}^l \partial x_l) - D_{\partial x_j} (\Gamma_{ik}^l \partial x_l) \\ &= \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i} \partial x_l + \Gamma_{jk}^l D_{\partial x_i} \partial x_l - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} \partial x_l - \Gamma_{ik}^l D_{\partial x_j} \partial x_l \\ &= \frac{\partial \Gamma_{jk}^h}{\partial x_i} \partial x_h + \Gamma_{jk}^l \cdot \Gamma_{il}^h \cdot \partial x_h - \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial x_j} \cdot \partial x_h - \Gamma_{ik}^l \cdot \Gamma_{jl}^h \partial x_h \end{aligned}$$

□

NOTATION 1. *On pose :*

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$$

$$R_{ij,k}^h = \frac{\partial \Gamma_{jk}^h}{\partial x_i} + \Gamma_{jk}^l \cdot \Gamma_{il}^h - \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial x_j} - \Gamma_{ik}^l \cdot \Gamma_{jl}^h$$

On a évidemment :

$$T(\partial x_i, \partial x_j) = T_{ij}^k \partial x_k$$

$$R(\partial x_i, \partial x_j)\partial x_k = R_{ij,k}^l \partial x_l$$

6. Courbure et Transport Parallèle

DÉFINITION 6.1. *Un champ X sur M est dit parallèle relativement à une connexion D si*

$$D_X Y = 0, \forall Y \in \chi(M)$$

PROPOSITION 6.1. *Un champ X est parallèle si et seulement si la restriction de X sur toute courbe (c) est parallèle le long de cette courbe .*

DÉMONSTRATION. Soit (c) une courbe quelconque ; on a :

$$(D_{c'} X |_c)_t = D_{c'(t)} X$$

Donc, si X est parallèle, puisque $D_{c'(t)} X = 0 \forall t$, on aura

$$D_{c'} X |_c = 0$$

C'est à dire X est parallèle le long de c .

Réciproquement, supposons que la restriction de X à une courbe quelconque soit parallèle .

Soit $x_0 \in M$ et $Y_{x_0} \in T_{x_0} M$

1. $Y_{x_0} = 0$ alors $D_{Y_{x_0}} X = 0$
2. $Y_{x_0} \neq 0$,

On considère la courbe intégrale (c) tel que

$$\begin{cases} c(0) &= x_0 \\ c'(0) &= Y_{x_0} \end{cases}$$

Donc, on aura :

$$D_{Y_{x_0}} X = D_{c'(0)} X = (D_{c'} X |_c)_0$$

□

PROPOSITION 6.2. *Soit U une carte d'une variété M eAutour de x_0 un point de M . Alors la restriction de la courbure sur U est nulle si et seulement si tout vecteur $V_0 \in T_{x_0} M$ peut être prolongé par parallélisme en un voisinage de x_0 (c'est à dire $\exists U' \subset U$ et $X \in \chi(U')$ parallèle tel que $X_{x_0} = V_0$).*

DÉMONSTRATION. Dans cette démonstration, il s'agit d'étudier l'intégration du système

$$\left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x) X^\gamma Y^\beta \right) = 0$$

C'est à dire

$$\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha X^\gamma$$

avec la condition initiale $X^\alpha(x_0) = V_0$

D'après le théorème de Fubini, la condition d'intégrabilité s'écrit :

$$\frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial x^\mu} X^\gamma + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial X^\gamma}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha}{\partial x^\beta} X^\gamma + \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha \frac{\partial X^\gamma}{\partial x^\beta}$$

C'est à dire

$$\frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial x^\mu} X^\gamma + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha (-\Gamma_{\mu l}^\gamma X^l) = \frac{\partial \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha}{\partial x^\beta} X^\gamma + \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha (-\Gamma_{\beta l}^\gamma X^l)$$

Donc, $R_{\mu\beta l}^\alpha X^l = 0$

Ainsi, si $R|_U = 0$, la condition d'intégrabilité est satisfaite sur U pour tout X^l . Par suite pour tout $x_0 \in U$ et pour tout $V_0 \in T_{x_0}U$, il existe un voisinage W de x_0 dans U et une solution $X \in \chi(W)$ telle que $X_{x_0} = V_0$

Réciproquement, soit U un voisinage de M et supposons que tout vecteur $V_0 \in T_{x_0}U$ peut se prolonger par parallélisme en un champ X sur un voisinage $W \subset U$ (X est parallèle tel que $V_0 \in T_{x_0}U$).

On aura sur W

$$R(Y, Z)X = D_Y D_Z X - D_Z D_Y X - D_{[Y, Z]} X$$

$\forall Y, Z \in \chi(W)$ c'est à dire

$$(R(\cdot, \cdot)X)_x = 0$$

En particulier en prenant $x = x_0$

$$R(\cdot, \cdot)V_0 = 0$$

Comme V_0 est arbitraire, $R_{x_0} = 0$, mais x_0 est arbitraire sur U alors

$$R|_U = 0.$$

□

REMARQUE 6.1. On propose de calculer la courbure de ∇ pour vérifier si l'on peut prolonger V_A non seulement le long de γ mais localement dans

d'autres dimensions. En effet :

$$\left\{ \begin{array}{l} R(\partial x, \partial y)\partial z = 0 \\ R(\partial x, \partial z)\partial y = 0 \\ R(\partial y, \partial x)\partial z = 0 \\ R(\partial x, \partial y)\partial x = 0 \\ R(\partial x, \partial y)\partial x = 0 \\ R(\partial x, \partial z)\partial x = 0 \\ R(\partial x, \partial z)\partial z = 0 \\ R(\partial y, \partial z)\partial y = 0 \\ R(\partial y, \partial z)\partial z = 0 \end{array} \right.$$

ainsi $R = 0$. Par suite, V_A est prolongeable dans toutes les directions.

7. Exercices

EXERCICE 7.1. Soit D la connexion canonique sur \mathbb{R}^2 et L le tenseur tel que $L \in \otimes^1_2(M)$, c'est à dire

$$L : \chi(\mathbb{R}^n) \times \chi(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \chi(\mathbb{R}^n),$$

(une application bilinéaire). On donne $L^1_{11} = 2x$, $L^2_{12} = xy$ et les autres coefficients sont nuls.

- (1) Vérifier que $\nabla = D + L$ est une connexion.
- (2) Donner les coefficients de Christoffel de ∇ .
- (3) Calculer $\nabla_X Y$ où $X = x\partial x$ et $Y = y^2\partial x - x\partial y$.

EXERCICE 7.2. On se donne dans \mathbb{R}^3 , la courbe $\gamma(t) = (t, t, t)$. Soit $V_0 = (1, 2, -1)$ et ∇ la connexion sur \mathbb{R}^3 tel que $\Gamma^1_{12} = x$ et les autres coefficients sont nuls. On propose de calculer le champ de vecteurs $V(t) \in \chi(\gamma)$ parallèle qui prolonge V_0 .

EXERCICE 7.3. On se donne dans \mathbb{R}^3 , la courbe $\gamma(t) = (t, 1, 2)$ et ∇ la connexion sur \mathbb{R}^3 tel que $\Gamma^1_{11} = \frac{1}{1+x^2}$, $\Gamma^3_{33} = \frac{1}{2}$ et les autres coefficients sont nuls. On propose de calculer le champ de vecteurs $V(t) \in \chi(\gamma)$ parallèle qui prolonge $V_A = \gamma(0) = (0, 1, 2)$.

EXERCICE 7.4. On considère $M = S^2 = \{(x, y, z)/x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ (la sphère unité de \mathbb{R}^3) munie de la connexion D qui est la restriction de la connexion canonique de \mathbb{R}^3 sur S^2 . On considère les deux champs de vecteurs $X = (\cos \theta)\partial \theta$ et $Y = \partial \theta - \sin \varphi \partial \varphi$. On a $\Gamma^1_{11} = \sin^2 \varphi$ et $\Gamma^2_{22} = 1$. On se propose de calculer la torsion et la courbure de la connexion linéaire D , c'est à dire $T(X, Y)$ et $R(X, Y)X$.

CHAPITRE 6

Variétés Riemanniennes

1. Métrique Riemannienne

En géométrie différentielle, la géométrie Riemannienne est l'étude des métriques Riemanniennes, c'est-à-dire des formes bilinéaires définies positives sur les variétés

DÉFINITION 1.1. On appelle variété Riemannienne un couple (M, g) où M est une variété C^∞ et g un tenseur de type $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sur M tel qu'en tout point $x \in M$, g_x est un produit scalaire sur $T_x M$ (càd une forme bilinéaire, symétrique, définie et positive). On notera aussi :

$$g_x(X, Y) = \langle X, Y \rangle_x.$$

g peut être vu comme un champ de tenseur symétrique sur M , c'est à dire :

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M).$$

une forme bilinéaire, symétrique, définie et positive.

THÉORÈME 1.1. *Théorème fondamental de la géométrie Riemannienne :*

Sur toute variété Riemannienne (M, g) , il existe une et une seule connexion linéaire D à torsion nulle telle que :

$$Dg = 0.$$

DÉMONSTRATION. On cherche à trouver une connexion D qui vérifie :

$$(1.1) \quad X \langle Y, Z \rangle = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle$$

$$(1.2) \quad D_X Y - D_Y X = [X, Y]$$

pour tous $X, Y, Z \in \chi(M)$

Unicité :

Supposons qu'une telle connexion existe alors on tire par permutation circulaire

$$(S) \begin{cases} Y \cdot \langle Z, X \rangle = \langle D_Y Z, X \rangle + \langle Z, D_Y X \rangle (1') \\ Z \cdot \langle X, Y \rangle = \langle D_Z X, Y \rangle + \langle X, D_Z Y \rangle (1'') \end{cases}$$

En résolvant le système (S) , $(1) + (1') - (1'')$ on a :

$$\begin{aligned} A &= X \cdot \langle Y, Z \rangle + Y \cdot \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ &= 2 \langle D_X Y, Z \rangle + \langle D_X Z - D_Z X, Y \rangle + \langle D_Y Z - D_Z Y, X \rangle + \langle D_Y X - D_X Y, Z \rangle \end{aligned}$$

En utilisant la condition (1) du Théorème fondamental de la géométrie Riemannienne, on note

$$(1.3) \quad \langle D_X Y, Z \rangle = X \cdot \langle Y, Z \rangle + Y \cdot \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle$$

Puisque la métrique est non dégénérée, cette formule détermine bien $D_X Y$, ce qui prouve l'unicité .

Existence :

Pour montrer l'existence, on définit $D_X Y$ par la formule (1) et l'on montre qu'il s'agit bien d'une connexion linéaire qui satisfait aux axiomes 1 et 2. \square

2. Calculs en coordonnées locales

Soit (x, U) un système de coordonnées locales autour d'un point $p \in M$. On note :

$$g_{\alpha\beta} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right\rangle .$$

On peut donc introduire la matrice symétrique suivante :

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

Les coefficients de la matrice Riemannienne sont appelés les coefficients de la métrique dans la carte (x, U) .

On propose de chercher les coefficients de Christoffel de la connexion de Levi-Civita

associée à g . On a :

$$\begin{aligned} \langle D_{\partial x_i} \partial x_j, \partial x_k \rangle &= \langle \Gamma_{ij}^l \partial x_l, \partial x_k \rangle \\ &= \Gamma_{ij}^l \langle \partial x_l, \partial x_k \rangle \\ &= \Gamma_{ij}^l g_{lk} . \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left\langle D_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\beta}, \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \right) .$$

C'est à dire

$$\langle \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} \right).$$

En posant

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = g_{\gamma\mu} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}.$$

On obtient :

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} \right)$$

Ce qui détermine les coefficients de la connexion. Les fonctions $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ sont appelées Symboles de Christoffel de 1ère espèce et les $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ sont dits Symboles de Christoffel de 2ème espèce.

Donc, il faut finalement retrouver les coefficients de la connexion linéaire de 2ème espèce.

$$\begin{cases} \langle D_{\partial x_i} \partial x_j, \partial x_k \rangle &= \frac{1}{2} (\partial x_i g_{jk} + \partial x_j g_{ki} - \partial x_k g_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right). \end{cases}$$

Et finalement,

$$(2.1) \quad \Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right).$$

où $g^{lk} = (g_{lk})^{-1}$

EXEMPLE 2.1. On considère la métrique canonique sur \mathbb{R}^n $g = \sum_{i=1}^n dx_i \otimes dx_i$ et la matrice associée est :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

La métrique canonique sur \mathbb{R}^n doit vérifier :

$$\begin{aligned} g(\partial x_i, \partial x_j) &= (dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2 + \dots + dx_n \otimes dx_n)(\partial x_i, \partial x_j) \\ &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Et en appliquant la formule (2), on obtient :

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) = 0.$$

D'où la connexion canonique est la connexion associée à la métrique canonique .

EXEMPLE 2.2. On va considérer une autre métrique sur \mathbb{R}^3 définie par :

$$g = \begin{pmatrix} 1+x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^z \end{pmatrix}$$

Comme g est une matrice diagonale alors l'inverse de g est donné par :

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-z} \end{pmatrix}$$

D'après l'équation (2) on trouve :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(2x) = \frac{x}{1+x^2}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(0) = 0, \\ \Gamma_{21}^1 &= \Gamma_{12}^1 = 0. \end{aligned}$$

La torsion étant nulle donc ∇ est symétrique, c'est à dire $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

3. Interprétation géométrique

DÉFINITION 3.1. Une connexion linéaire D sur (M, g) est dite compatible avec la métrique si le transport parallèle le long de toute courbe (c) de M , conserve le produit scalaire c'est à dire si l'application

$$\tau_t^c : T_{c(a)}M \longrightarrow T_{c(t)}M$$

vérifie :

$$\langle v_a, w_a \rangle = \langle \tau_t^c v_a, \tau_t^c w_a \rangle$$

Ou encore si et seulement si pour tout couple de champs parallèle v, w le long de (c)

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$$

LEMME 3.1. Une connexion D est compatible avec la métrique si et seulement si pour toute courbe (c) et pour tout couple de champs v, w , c'est à dire $v, w \in \chi(c)$, on a :

$$(3.1) \quad \frac{d}{dt} \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \left\langle \frac{\overrightarrow{D}v}{dt}, w \right\rangle + \left\langle v, \frac{\overrightarrow{D}w}{dt} \right\rangle$$

(où on a : $\frac{D}{dt}v = D_c v$)

DÉMONSTRATION. Si la condition (3.1) est vérifiée, pour tout champs de vecteurs \vec{v} et \vec{w} parallèles le long de (c) , on a

$$\frac{\overrightarrow{D}v}{dt} = \frac{\overrightarrow{D}w}{dt} = 0$$

D'où,

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$$

Réciproquement, soient P_1, \dots, P_n n champs parallèles le long de (c) et orthonormales en $c(0)$, (donc en tout point, puisque D est compatible avec la métrique). Par la construction, il suffit de prendre une base orthonormée en $c(o)$ et la transporter par parallélisme pour avoir une base orthonormée sur $\chi(c)$.

On a :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \sum_{i=1}^m v^i(t) \vec{P}_i \\ \vec{w} &= \sum_{j=1}^m w^j(t) \vec{P}_j\end{aligned}$$

Donc ,

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^m v^i(t) w^i(t)$$

Ainsi :

$$(3.2) \quad \frac{d}{dt} \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^m (v^i(t) w^i(t) + v^i(t) w^i(t))$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{Dv}}{dt} &= \sum_{i=1}^m \frac{dv^i}{dt} \vec{P}_i + \sum_{i=1}^m v^i \frac{\overrightarrow{DP}_i}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{dv^i}{dt} \vec{P}_i\end{aligned}$$

Et de la même façon on calcule :

$$\frac{\overrightarrow{Dw}}{dt} = \sum_{j=1}^m \frac{dw^j}{dt} \vec{P}_j$$

Poursuite,

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\overrightarrow{Dv}}{dt}, \vec{w} \right\rangle + \left\langle \vec{v}, \frac{\overrightarrow{Dw}}{dt} \right\rangle &= \sum_{i=1}^m \frac{dv^i}{dt} \vec{P}_i w^i(t) + \sum_{j=1}^m v^j(t) \frac{dw^j}{dt} \vec{P}_j \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{dv^i}{dt} \vec{P}_i w^i(t) + \sum_{i=1}^m v^i(t) \frac{dw^i}{dt} \vec{P}_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{dv^i}{dt} w^i(t) + v^i(t) \frac{dw^i}{dt} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \text{ d'après (3)}\end{aligned}$$

□

On va admettre le résultat suivant :

COROLLAIRE 3.1. *Une connexion linéaire D sur une variété Riemannienne est compatible avec une métrique g si et seulement si $Dg = 0$*

EXERCICE 3.1. *On considère \mathbb{R}^3 muni de la métrique*

$$g = (1 + x^2) dx \otimes dx + dy \otimes dy + e^z dz \otimes dz$$

(1) Calculer les coefficients de Christoffel associés à g .

(2) Soit

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$$

Transporter parallèlement le vecteur $\vec{V}(1, -1, 2)$ le long de γ

SOLUTION 1. 1. Comme g est une matrice diagonale alors l'inverse de g

est donné par :

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-z} \end{pmatrix}$$

Ainsi, g doit vérifier la formule suivante

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) \text{ pour } k = 1, 2, 3 \text{ où } g^{lk} = (g_{lk})^{-1}$$

On obtient

1.

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11}(2x) = \frac{x}{1+x^2} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} g^{11}(0) = 0 \\ \Gamma_{21}^1 &= \Gamma_{12}^1 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Aussi on a : } \Gamma_{13}^1 = \frac{1}{2} g^{11}(0) = 0 = \Gamma_{31}^1 \text{ et } \Gamma_{33}^3 = \frac{1}{2}$$

2. Soit la courbe

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$$

V_t transport parallèle le long de (γ) :

Le champ

$$V \in \chi(M)$$

parallèle qui prolonge $V_a(1, -1, 2)$ en $A = \gamma(0)$.

On propose de vérifier que $\langle v_t, w_t \rangle = \langle v_a, w_a \rangle$ ce dont on est sûr, car g est adaptée à D.

En effet,

$$V = v^1(t) \frac{\partial}{\partial x} + v^2(t) \frac{\partial}{\partial y} + v^3(t) \frac{\partial}{\partial z} \in \chi(\gamma)$$

Pour que le champ $V \in \chi(\gamma)$ soit parallèle le long de (γ) il faut qu'il vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dv^1}{dt} + v^i \frac{d\gamma^j}{dt} \Gamma_{ji}^1 = 0 \\ \vdots \\ \frac{dv^n}{dt} + v^i \frac{d\gamma^j}{dt} \Gamma_{ji}^n = 0 \end{cases}$$

On résoud le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dv^1}{dt} + v^1 \frac{d\gamma^1}{dt} \Gamma_{11}^1 = 0 \\ \frac{dv^2}{dt} = 0 \\ \frac{dv^3}{dt} + v^3 \frac{d\gamma^3}{dt} \Gamma_{33}^3 = 0 \end{cases}$$

Après remplacement on trouve :

$$\begin{cases} \frac{dv^1}{dt} + v^1 \frac{1}{1+t^2} = 0 \\ v^2 = \text{cons} \tan t e = a \\ \frac{dv^3}{dt} + v^3 \times \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

ainsi $\frac{dv^3}{v^3} = -\frac{1}{2}$ donc $\ln v^3 = -\frac{1}{2}t + b$ c'est à dire

$$v^3 = C e^{-\frac{t}{2}}$$

De même $\frac{dv^1}{v^1} = -t \frac{dt}{1+t^2}$ par suite $\ln v^1 = -\frac{1}{2} \ln(1+t^2) + c$ de plus
 $\ln v^1 = \ln \frac{k}{\sqrt{1+t^2}}$
 donc

$$v^1 = \frac{k}{\sqrt{1+t^2}}$$

V prolonge $V_a = (1, -1, 2)$ en $A = \gamma(0)$, $V_a = (K, a, c) = (1, -1, 2)$

Par conséquent on a :

$$V_t = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} + 2e^{-\frac{t}{2}} \frac{\partial}{\partial z} \in \chi(\gamma) \text{ prolonge } V_a$$

$$\text{Donc } V_t = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, -1, 2e^{-\frac{t}{2}} \right)$$

d'où $V_t = \tau_t V_a$. Donc, D adapté à g conserve le transport parallèle

$$\langle \tau_{V_1}, \tau_{V_2} \rangle_t = \langle V_1, V_2 \rangle_{t_0}$$

4. Tenseur de courbure sur une Variété Riemannienne

Soit (M, g) une variété Riemannienne pour tous $X, Y, Z, T \in \chi(M)$ On pose :

$$R(X, Y, Z, T) = g(R(X, Y)Z, T)$$

Propriétés : Le tenseur R d'une variété Riemannienne (M, g) , munie de la connexion canonique D , vérifie les identités suivantes :

- (1) $R(X, Y)Z + R(Y, X)Z = 0$
- (2) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$
- (3) $R(X, Y, Z, W) + R(X, Y, W, Z) = 0$
- (4) $R(X, Y, Z, W) - R(Z, W, X, Y) = 0$

DÉFINITION 4.1. soit (M, g) une variété Riemannienne, munie de la connexion canonique D , $x \in M$ et P_x un 2-plan de $T_x M$ c'est à dire un sous espace vectoriel de dimension 2; la courbure sectionnelle de M en x le long de P_x est le réel :

$$k(P_x) = -\frac{R(e_1, e_2, e_1, e_2)}{G(e_1, e_2, e_1, e_2)}$$

où $\{e_1, e_2\}$ est une base de P_x où

$$G(X, Y, Z, T) = \|X\|^2 \times \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2 \quad G(X, Y, X, Y)$$

REMARQUE 4.1. On rappelle qu'un double 2-forme sur une variété M est un tenseur Ω de type $\binom{0}{4}$ qui possède les propriétés suivantes :

$$(1) \quad \Omega(X, Y, Z, W) = -\Omega(Y, X, Z, W)$$

$$(2) \quad \Omega(X, Y, Z, W) = -\Omega(X, Y, W, Z)$$

EXEMPLE 4.1. (Double 2-forme). Soit (M, g) une variété Riemannienne :

$$G : \begin{array}{ccccccc} \chi(M) & \times & \chi(M) & \times & \chi(M) & \times & \chi(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X & , & Y & , & Z & , & W) & \longrightarrow & G(X, Y, Z, W) = g(X, Z)g(Y, W) - g(Y, Z)g(X, W) \end{array}$$

Il est facile de vérifier que G est une double 2-forme .

REMARQUE 4.2. Si X, Y sont deux champs de vecteurs, c'est à dire $X, Y \in T_x M$, on a :

$$G(X, Y, X, Y) = \|X\|^2 \times \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2 \quad G(X, Y, X, Y)$$

représente donc l'aire du parallélogramme engendré par X et Y . Donc, si X et Y sont linéairement indépendant , on a $G(X, Y, X, Y) \neq 0$.

DÉFINITION 4.2. Une variété Riemannienne (M, g) est dite à courbure constante si la courbure sectionnelle $k(P_x)$ ne dépend ni de $P_x \in T_x M$ ni de x .

EXERCICE 4.1. On va montrer dans cet exercice que la courbure sectionnelle d'une sphère est égale à 1.

SOLUTION 2. On a :

$$k = -\frac{R(e_1, e_2, e_1, e_2)}{G(e_1, e_2, e_1, e_2)}$$

avec

$$\begin{array}{l} e_1 = \partial\phi \\ e_2 = \partial\theta \end{array}$$

On calcule $R(\partial\phi, \partial\theta, \partial\phi, \partial\theta)$, on peut consulter l'exemple (2.3) dans la section Exemples de géodésiques.

$$\begin{aligned}
R(\partial\phi, \partial\theta, \partial\phi, \partial\theta) &= \langle R(\partial\phi, \partial\theta, \partial\phi), \partial\theta \rangle \\
R(\partial\phi, \partial\theta)\partial\phi &= D_{\partial\phi}D_{\partial\theta}\partial\phi - D_{\partial\theta}D_{\partial\phi}\partial\phi - D_{[\partial\theta, \partial\phi]}\partial\phi \\
&= D_{\partial\phi} \cot \phi \partial\theta - 0 \\
&= -\frac{1}{\sin^2 \phi} \partial\theta \\
\text{Donc } R(\partial\phi, \partial\theta, \partial\phi, \partial\theta) &= -\frac{1}{\sin^2 \phi}
\end{aligned}$$

On calcule $G(\partial\phi, \partial\theta, \partial\phi, \partial\theta)$

$$\begin{aligned}
G(\partial\phi, \partial\theta, \partial\phi, \partial\theta) &= \langle \partial\theta, \partial\theta \rangle \langle \partial\phi, \partial\phi \rangle - \langle \partial\theta, \partial\theta \rangle \\
&= g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 \\
&= (\sin^2 \phi \times 1) - 0 \\
&= \sin^2 \phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Parsuite } k(Px) &= -\left(-\frac{1}{\sin^2 \phi}\right) \times \frac{1}{\sin^2 \phi} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Géodésiques d'une variété Riemannienne

1. Définitions - Existence locale

En géométrie, une géodésique désigne le chemin le plus court, ou l'un des plus courts chemins s'il en existe plusieurs, entre deux points d'un espace pourvu d'une métrique. Lorsque l'on change cette notion de distance, les géodésiques de l'espace peuvent prendre une allure très différente.

Dans tout ce chapitre, M désigne une variété Riemannienne .

On notera $\langle X, Y \rangle$ le produit scalaire défini par la métrique et la norme du champ X

$$\| X \| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$$

DÉFINITION 1.1. Soit γ une courbe lisse définie par

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow M$$

une application C^∞ . (γ) est une géodésique de M si :

$$D_{\gamma'}\gamma' = 0$$

c'est à dire $\gamma'(t)$ est parallèle le long de (γ) .

Avec un peu d'imagination on peut remarquer qu'un vecteur vitesse ne conserve sa direction que sur les droites. Ainsi dans ce paragraphe, on est en train d'introduire la notion de courbes équivalentes aux droites de \mathbb{R}^n .

REMARQUE 1.1. Si $\gamma(t)$ est une géodésique, il en est de même pour $\gamma(\lambda t)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. En effet : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $u = \lambda t$.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{du} &= \frac{d\gamma}{dt} \times \frac{dt}{du} \\ &= \frac{1}{\lambda} \gamma'(t) \end{aligned}$$

vérifie :

$$\begin{aligned} D_{\gamma'(u)}\gamma'(u) &= \frac{1}{\lambda} D_{\gamma'(t)}\left(\frac{1}{\lambda} \gamma'(t)\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\gamma'(t) + \frac{1}{\lambda} D_{\frac{1}{\lambda}\gamma'(t)}\gamma'(t) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} D_{\gamma'(t)}\gamma'(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

REMARQUE 1.2. Si γ est une géodésique, la norme du vecteur $\|\gamma'\|$ est constante le long de γ .

DÉMONSTRATION. En effet, on a : $Dg = 0$ donc $(D_X g)(Y, T) = 0$ pour tout $X, Y, T \in \chi(M)$

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) &= g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z) \\ (D_Y g)(Z, Z) &= 0 \\ Y\langle Z, Z \rangle &= Z\langle D_Y Z, Z \rangle \quad \forall Y, Z \in \chi(M) \end{aligned}$$

Soit $Y = \frac{d}{dt}$ et $Z = \gamma'(t)$ avec $M' =]-\epsilon, \epsilon[\times M$ donc $\left\{ \frac{d}{dt}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ est une base de $\chi(M')$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_{\gamma(t)} &= 2 \left\langle D_{\frac{d}{dt}} \gamma', \gamma' \right\rangle_{\gamma(t)} \\ &= 2 \left\langle D_{\gamma'(t)} \gamma'(t), \gamma'(t) \right\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{d}{dt} \|\gamma'(t)\|^2 = 0$$

Par conséquent, $\|\gamma'(t)\| = c$ où c est une constante . \square

REMARQUE 1.3. Soit $c : [a, b] \rightarrow M$ une courbe paramétrée de classe C^∞ . On pose $s(t) = \text{long}_{(p,q)} c$ $s(t) = \int_a^t \|\dot{c}\| d\tau$ où ($p = c(a)$, $q = c(t)$) . $s(t)$ est dite la longueur de l'arc entre p et q . On a le résultat suivant :

PROPOSITION 1.1. Si γ est une géodésique, alors le paramètre t est une fonction linéaire de la longueur de l'arc : $s(t) = \|\gamma'\| (t - a)$. En particulier, si γ est une géodésique, $\|\gamma'\|$ est la longueur de γ entre $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$.

PROPOSITION 1.2. Pour un système de coordonnées locales (x, U) , si $x^\alpha(t)$ sont les coordonnées de $(x \circ \gamma)$ l'équation $D_{\gamma'} \gamma' = 0$ donne :

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha(x(t)) \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} = 0$$

DÉMONSTRATION. En fait : $D_{\gamma'} \gamma' = 0$.

$$D_{\frac{d\gamma^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{d\gamma^j}{dt} \frac{\partial}{\partial x_j} = 0$$

En appliquant la formule : $D_{\gamma'} fV = \frac{df}{dt} V + f D_{\gamma'} V$

$$\text{On obtient : } \frac{d^2 \gamma^j}{dt^2} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{d\gamma^j}{dt} D_{\frac{d\gamma^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = 0$$

$$\text{Alors, } \frac{d^2 \gamma^j}{dt^2} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{d\gamma^j}{dt} \frac{d\gamma^i}{dt} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} = 0$$

Parsuite, $\left(\frac{d^2\gamma^k}{dt^2} + \frac{d\gamma^j}{dt} \frac{d\gamma^i}{dt} \Gamma_{ij}^k\right) \partial x_k = 0$

Donc, $\frac{d^2\gamma^k}{dt^2} + \frac{d\gamma^j}{dt} \frac{d\gamma^i}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0$ □

2. Exemples de Géodésiques

EXEMPLE 2.1. 1. Dans \mathbb{R}^n avec la métrique habituelle (produit scalaire canonique) on a $\Gamma_{i,j}^k = 0$. Les équations des géodésiques s'écrivent donc $\frac{d^2x_i}{dt^2} = 0$ Les solutions sont des droites.

En effet, soit

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

$\gamma(t)$ est une géodésique si et seulement si :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^k}{dt^2} &= 0 \\ \text{donne } \frac{dx^k}{dt} &= C_k \\ \Rightarrow \gamma(t) &= \begin{cases} x_1 = c_1t + d_1 \\ \vdots \\ x_n = c_nt + d_n \end{cases} \end{aligned}$$

Donc les géodésiques de \mathbb{R}^n sont des droites.

EXEMPLE 2.2. 2. Les géodésiques d'un cylindre droit Z sont les génératrices. Les cercles obtenus en coupant par des plans perpendiculaires aux génératrices et les hélices .

EXEMPLE 2.3 (3). 3. Les géodésiques d'une sphère sont des arcs de grands cercles.

En effet,

$$\begin{aligned} f : S^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \phi) &\longrightarrow (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi) \end{aligned}$$

$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$$

On pose

$$\begin{aligned} h &= f^*(g)(X, Y) \\ &= g(f_*X, f_*Y) \end{aligned}$$

On calcule : $h(\partial\theta, \partial\theta) = g(f_*\partial\theta, f_*\partial\theta)$, $h(\partial\theta, \partial\phi) = g(f_*\partial\theta, f_*\partial\phi)$

et $h(\partial\phi, \partial\phi) = g(f_*\partial\phi, f_*\partial\phi)$.

On cherche la connexion associée à h .

On calcule $f_*\partial\theta$:

$$\begin{aligned} f_*\partial\theta &= \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi \\ 0 & -\sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f_*\partial\theta &= \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On calcule $f_*\partial\phi$:

$$\begin{aligned} f_*\partial\phi &= \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \\ 0 & -\sin\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f_*\partial\phi &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ -\sin\phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De la même manière, on calcule $g(f_*\partial\theta, f_*\partial\theta)$:

$$\begin{aligned} g(f_*\partial\theta, f_*\partial\theta) &= {}^t(f_*\partial\theta) g(f_*\partial\theta) \\ &= \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta\sin\phi \end{pmatrix} \\ &= \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta\sin^2\phi \\ &= \sin^2\phi \end{aligned}$$

Aussi, on calcule $g(f_*\partial\theta, f_*\partial\phi)$:

$$\begin{aligned} g(f_*\partial\theta, f_*\partial\phi) &= {}^t(f_*\partial\theta) g(f_*\partial\phi) \\ &= \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\phi \end{pmatrix} \\ &= (-\sin\theta\sin\phi)(\cos\theta\cos\phi) + (\cos\theta\sin\phi)(\sin\theta\cos\phi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

De même pour $g(f_*\partial\phi, f_*\partial\phi)$:

$$\begin{aligned} g(f_*\partial\phi, f_*\partial\phi) &= {}^t(f_*\partial\phi) g(f_*\partial\phi) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & \sin\theta\cos\phi & \sin\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \\ &= \cos^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\phi \\ &= 1 \end{aligned}$$

On trouve alors : $h_{11} = \sin^2\phi$, $h_{12} = 0$ et $h_{22} = 1$.

On calcule Γ_{ij}^k

$$h = \begin{pmatrix} \sin^2\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors, } h^{-1} = \frac{1}{\sin^2\phi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\phi \end{pmatrix}$$

D'après la formule :

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^l &= \frac{1}{2}h^{lk} \left(\frac{\partial h_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial h_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x_k} \right) \\ \text{Alors, } \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}h^{11} \left(\frac{\partial h_{11}}{\partial\theta} + \frac{\partial h_{11}}{\partial\theta} - \frac{\partial h_{11}}{\partial\theta} \right) & \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2}h^{22} \left(\frac{\partial h_{12}}{\partial\theta} + \frac{\partial h_{21}}{\partial\theta} - \frac{\partial h_{11}}{\partial\phi} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sin^2\phi} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} \sin^2\phi \right) & \text{Ensuite,} &= \frac{1}{2} \times 1 \times (-2\sin\phi\cos\phi) \\ &= 0 & &= -\sin\phi\cos\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2}h^{11}\left(\frac{\partial h_{21}}{\partial \theta} + \frac{\partial h_{11}}{\partial \phi} - \frac{\partial h_{12}}{\partial \theta}\right) & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}h^{21}\left(\frac{\partial h_{21}}{\partial \theta} + \frac{\partial h_{11}}{\partial \phi} - \frac{\partial h_{12}}{\partial \theta}\right) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sin^2 \phi} \times 2 \sin \phi \cos \phi & &= \frac{1}{2} \times 0 \times (2 \sin \phi \cos \phi) \\
\text{De plus,} &= \frac{\cos \phi}{\sin \phi} & \text{Aussi,} &= 0 \\
&= \cot \phi & &= \Gamma_{21}^2 \\
&= \Gamma_{21}^1 & & \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}h^{11}\left(\frac{\partial h_{21}}{\partial \phi} + \frac{\partial h_{12}}{\partial \phi} - \frac{\partial h_{22}}{\partial \theta}\right) & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2}h^{22}\left(\frac{\partial h_{22}}{\partial \phi} + \frac{\partial h_{22}}{\partial \phi} - \frac{\partial h_{22}}{\partial \theta}\right) \\
\text{Et,} &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sin^2 \phi} \times 0 & \text{Enfin,} &= \frac{1}{2} \times 1 \times 0 \\
&= 0 & &= 0
\end{aligned}$$

A la recherche d'une géodésique :

On applique la formule suivante :

$$\frac{d^2 \gamma^k}{dt^2} + \frac{d\gamma^j}{dt} \frac{d\gamma^i}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0$$

D'où

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{d\phi}{dt} \frac{d\theta}{dt} \Gamma_{12}^1 + \frac{d\theta}{dt} \frac{d\phi}{dt} \Gamma_{21}^1 &= 0 \\
\frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta}{dt} \Gamma_{11}^2 &= 0
\end{aligned}$$

Poursuite le système devient :

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \cot \phi \frac{d\theta}{dt} \frac{d\phi}{dt} = 0 \\ \frac{d^2 \phi}{dt^2} - \sin \phi \cos \phi \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

Considérons les cas suivants :

1. θ est une constante alors le système devient

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = cte$$

qui a pour solution

$$\phi(t) = at + b$$

avec a, b sont deux constantes. Dans ce cas, une géodésique est l'un des plus grands cercles verticaux.

2. $\theta \neq cte$. On peut considérer ϕ comme une fonction de θ .

Alors

$$\begin{aligned}
\text{donc} \quad \frac{d\phi}{dt} &= \frac{d\phi}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \\
\frac{d^2 \phi}{dt^2} &= \frac{d^2 \phi}{d\theta^2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{d\phi}{d\theta} \frac{d^2 \theta}{dt^2} \\
\text{car} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{d\phi}{dt}\right) &= \frac{d}{d\theta} \left(\frac{d\phi}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}\right) \\
&= \frac{d^2 \phi}{d\theta^2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{d\phi}{d\theta} \frac{d^2 \theta}{dt^2} \\
&= \frac{d^2 \phi}{dt^2}
\end{aligned}$$

On remplace dans le système :

On obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2\phi}{d\theta^2} - 2 \cot \phi \left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2 - \sin \phi \cos \phi = 0 \\
\text{car (la partie 2 du système 2) implique} & \frac{d^2\phi}{d\theta^2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{d\phi}{d\theta} \frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin \phi \cos \phi \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 0 \\
& \frac{d^2\phi}{d\theta^2} + \frac{d\phi}{d\theta} \frac{d^2\theta}{dt^2} \times \frac{1}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} - \sin \phi \cos \phi = 0 \\
\text{(la partie 1 du système 2) implique} & \frac{d^2\phi}{d\theta^2} - \sin \phi \cos \phi = -\frac{d\phi}{d\theta} \frac{d^2\theta}{dt^2} \times \frac{1}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} (E) \\
& \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \cot \phi \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \frac{d\phi}{d\theta} = 0 \\
& 2 \cot \phi \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \frac{d\phi}{d\theta} = -\frac{d^2\theta}{dt^2} \\
& 2 \cot \phi \left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2 = -\frac{d\phi}{d\theta} \frac{d^2\theta}{dt^2} \times \frac{1}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} \\
\text{d'où d'après (E) on a :} & \frac{d^2\phi}{d\theta^2} - \sin \phi \cos \phi - 2 \cot \phi \left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2 = 0
\end{aligned}$$

Par le changement de variables suivant :

$$\omega = \cot \phi$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\omega}{d\theta^2} + \omega &= 0 \\
\Rightarrow \omega &= c_1 \cos \phi + c_2 \sin \phi
\end{aligned}$$

Ceci représente l'équation d'un cercle dans le plan $z = c_1 \cos \phi + c_2 \sin \phi$ en coordonnées sphériques.

REMARQUE 2.1. *Deux points quelconques de la sphère peuvent être joints par une infinité de géodésiques différentes contrairement à ce qui se passe dans le plan. Ceci tient du fait que la sphère n'est que localement isométrique au plan : le plan tout entier s'envoie une infinité de fois sur la sphère, par conséquent à un couple de points de la sphère il correspond une infinité de couples du plan, donc une infinité de droites qui le joignent*

EXERCICE 2.1. *On considère \mathbb{R}^3 muni de la métrique*

$$g = (1 + x^2) dx \otimes dx + dy \otimes dy + e^z dz \otimes dz$$

- (1) Donner les équations des géodésiques .
- (2) Trouver deux vecteurs parallèles définis sur γ $X(t)$ et $Y(t)$ tel que $g(X, Y) = c$ où c est une constante.
- (3) Existe-t-il deux vecteurs parallèles sur γ , $z(t)$ et $\omega(t)$ tel que $g(z(t), \omega(t))$ n'est pas constante ?

SOLUTION 3. *On rappelle que :*

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11}(2x) = \frac{x}{1+x^2} \\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} g^{11}(0) = 0 \\
\Gamma_{21}^1 &= \Gamma_{12}^1 = 0
\end{aligned}$$

(voir chapitre variété Riemannienne exemple 2).

et on a que

$$\begin{aligned}\Gamma_{13}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(0) = 0 = \Gamma_{31}^1 \\ \Gamma_{33}^3 &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

1. $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ est une géodésique si :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \Gamma_{11} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \Gamma_{33} = 0 \end{cases}$$

Alors,

$$(2.2) \quad \begin{cases} x'' + \frac{x^2 x}{1+x^2} = 0 & (1) \\ y'' = 0 & (2) \\ z'' + \frac{1}{2}z^2 = 0 & (3) \end{cases}$$

Parsuite, (la première partie du système 2) implique : On pose $x = \text{sh } u$, $dx = \text{ch } u$

$$\begin{aligned} \text{Alors, } \int \text{ch}^2 u du &= kt + \mu \\ \text{donne } \int \frac{\text{ch } 2u + 1}{2} du &= kt + \mu \\ \frac{1}{4} \text{sh } 2u + \frac{1}{2}u &= kt + \mu \\ \frac{1}{2} \text{sh } u \text{ch } u + \frac{1}{2}u &= kt + \mu \\ \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \text{argsh } x &= kt + \mu \end{aligned}$$

Ensuite, (la deuxième partie du système 2) implique :

$$y' = c$$

Donc,

$$y = at + b$$

Finalement, (la troisième partie du système 2) implique : $\frac{z'}{(z')^2} = \frac{1}{2}$ Alors,

$$\begin{aligned} \int \frac{dz'}{z'^2} &= -\frac{1}{2}t + \alpha \\ \text{l'intégrale donne } \frac{-1}{z'} &= -\frac{1}{2}t + \alpha \\ z' &= \frac{2}{t+\beta} \\ z &= 2 \ln(t + \beta) + \gamma \\ \text{avec } \beta &= 2\alpha \end{aligned}$$

2. On rappelle que : $V_a = \left(\frac{a}{\sqrt{1+t^2}}, b, ce^{-\frac{t}{2}} \right)$. (même référence précédente). Soient

$$V_1 = (a, b, c)$$

$$V_2 = (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$g = (1 + x^2) dx \otimes dx + dy \otimes dy + e^z dz \otimes dz ,$$

$$\langle \tau_{V_1}, \tau_{V_2} \rangle = \left\langle \frac{a}{\sqrt{1+t^2}}, b, ce^{-\frac{t}{2}}; \frac{\alpha}{\sqrt{1+t^2}}, \beta, \gamma e^{-\frac{t}{2}} \right\rangle$$

$$\langle \tau_{V_1}, \tau_{V_2} \rangle = \frac{a\alpha}{1+t^2} (1+x^2)_{\gamma(t)} + b\beta + c\gamma e^{-t} (e^z)_{\gamma(t)}$$

$$\langle \tau_{V_1}, \tau_{V_2} \rangle = \frac{a\alpha}{1+t^2} (1+t^2) + b\beta + c\gamma e^{-t} (e^t) = \text{constante}$$

3. Il n'existe pas de tel vecteurs car le transport parallèle conserve le produit scalaire.

Bibliographie

- [1] Grifone,J; Géométrie différentielle, Polycope Master I, Université Paul Sabatier, Toulouse III (1996)
- [2] Spivak,M; Comprehensive introduction differential, Géométrie volume one-Houston, Texas (1979)
- [4] Eisenhsrt,L; Riemannian geometry, Princeton (1964)
- [5] Docarmo,M.P; Riemannian geometry, Instituto de mathematica pura aplicada, Rio de Janeiro (1988)
- [6] Docarmo,M.P; Differential geometry of curves and surfaces
- [7] Rossmann,W; Lectures On Differential Geometry. Uattawa University, Faculty Of Sciences. (2003)